Journal of Economic Theory and Econometrics, Vol. 31, No. 1, Mar. 2020, 97–152

Recent Development of Closed-form Approximate (Log-)Transition Probability Density Functions of Diffusion Processes

Seungmoon Choi*
School of Economics, University of Seoul

Abstract

Transition probability density function (TPDF) or log-TPDF of a diffusion is quite useful in many ways. For example, it can be employed not only to estimate a diffusion by the maximum likelihood estimation but also to simulate data from a diffusion or to price an asset when the underlying process follows a diffusion. However, unfortunately, the true TPDF of a diffusion is unknown with a few exceptions in general. Starting from Aït-Sahalia(2002)'s pioneering work on approximate but explicit TPDF of a univariate time-homogeneous diffusion to Choi (2019a)'s recent work on closed-form approximate TPDF of a multivariate time-inhomogeneous jump diffusion, several researchers have subsequently established the way to approximate the TPDFs or log-TPDFs of more general diffusion models. This article explains how people have resolved problems to generalize the method from Aït-Sahalia(2002)'s paper to Choi(2013, 2015)'s multivariate time-inhomogeneous diffusions. Due to space constraints, explanations of detailed theories or assumptions for their proof are reduced to the minimum and we show important results, with tacit facts not described in the original papers. In addition, we also introduce papers derived from and related to those key studies.

Keywords Time-Homogeneous Diffusion, Time-Inhomogeneous Diffusion, (Log-)Transition Probability Density

JEL Classification C22, C32, C58, C83

*I am very grateful to the editor, Noh-Sun Kwark, the co-editor, Jin Seo Cho and two anonymous referees. Associate Professor, School of Economics, University of Seoul (E-mail: schoi22@uos.ac.kr, Tel: 02-6490-2071) This work was supported by the 2019 Research Fund of the University of Seoul.

Received Feb. 29, 2020, Revised Mar. 11, 2020, Accepted Mar. 11, 2020

Journal of Economic Theory and Econometrics, Vol. 31, No. 1, Mar. 2020, 97–152

확산과정의 근사적 (로그)전이확률밀도 함수를 구체적으로 구하는 방법에 대한 최근 연구동향

최승문*
서울시립대학교 경제학부

Abstract 확산과정 (diffusion)의 전이확률밀도 (transition probability density) 함수 또는 로그-전이확률밀도 함수는 확산과정 모형을 최우추정법 (maximum likelihood estimation)으로 추정할 때 이용될 수 있을뿐 아니라 확산과정 모형의 데이터를 생성할 때 그리고 바탕이 되는 자산의 가격이 확산과정을 따를 때 자산의 가격을 계산할 때 등 여러 모로 매우 유용하게 활용될 수 있다. 그런데 불행히도 손에 꼽을 정도의 몇 가지 확산과정 모형들을 빼고는 확산과정의 전이확률밀도 함수는 보통 알려져 있지 않다. Aït-Sahalia (2002)가 선구적으로 단일변수 시간-균질 확산과정의 전이확률밀도 함수를 근사적으로 그렇지만 구체적인 식으로 구하는 방법을 개발한 것부터 시작되어 지금은 다변수 시간-비균질 점프 확산과정의 전이확률밀도 함수를 구체적인 식으로 근사시키는 방법까지 (Choi, 2019a), 여러 연구자들이 순차적으로 좀 더 일반적인 확산과정 모형들의 근사적 전이확률밀도 함수나 로그-전이확률밀도 함수를 구하는 방법과 이론들이 확립했다. 이 논문은 확산과정 모형의 근사적 전이확률밀도 함수나 로그-전이확률밀도 함수를 구하기 위해 Aït-Sahalia (2002)의 논문에서 Choi(2013,2015)의 다변수 시간-비균질 확산과정까지 좀 더 일반적인 모형들로 확장하는 과정에서 극복해야 할 문제들이 어떻게 해결됐는 설명하고 있다. 지면의 제약으로 자세한 이론이나 이의 증명을 위한 가정들에 대한 설명은 최대한 줄이고 중요한 결과들을 보여주며 원래 논문들에서 설명하지 않은 암묵적 사실들도 함께 설명하고 있다. 또한 이러한 중심이 되는 연구들에서 파생되거나 이들 연구를 이용한 관련된 논문들도 같이 소개하고 있다.

Keywords 시간-균질 확산과정, 시간-비균질 확산과정, (로그-)전이확률밀도

JEL Classification C22, C32, C58, C83

---

*본 논문의 게재를 위해 도와주신 편집장 곽노선, 공동편집장 조진서 그리고 유익한 논평을 주신 익명의 두 심사위원들에게 감사의 뜻을 표한다. 서울시립대학교 경제학부 부교수 (E-mail: schoi22@uos.ac.kr, Tel:02-6490-2071) 이 논문은 2019년도 서울시립대학교 교내학술연구비에 의하여 지원되었음.

Received Feb. 29, 2020, Revised Mar. 11, 2020, Accepted Mar. 11, 2020

1. 서론

게임이론부터 재무경제학까지 여러 분야의 경제학에서 다양한 경제변수들의 변화를 모형화 할 때 연속시간 확산과정 (diffusion process) 모형이 많이 이용되고 있다. 몇 가지 예를 들면, 최적제어이론 (optimal control theory) (Dixit and Pindyck, 1994), 자산 가격이론과 자산 포트폴리오 구성 이론 (Duffie, 2001), 환율 모형 (Krugman, 1991), 계약이론 (contract theory) (Holmstrom and Milgrom, 1987) 그리고 게임이론(game theory) (Bolton and Harris, 1999) 등이 있다.

확률미분방정식 (stochastic differential equation) 형태로 표현되는 단일변수 시간-균질 (time-homogeneous) 확산과정 모형은 다음과 같다:

$$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t. \tag{1}$$

여기에서 $\mu(X_t)$는 추세 함수이고 $\sigma(X_t)$는 변동성 함수로 두 연속적인 관측값들 사이의 시간 Δ가 0으로 수렴할 때, 각각 확률과정 X_t의 변화량의 순간적인 조건부 기대와 조건부 분산이다. 그리고 W_t는 표준 브라운운동 (standard Brownian motion)이다. 모수적(parametric)인 접근법에서는 추세함수와 변동성 함수를 $\mu(X_t;\theta)$와 $\sigma(X_t;\theta)$로 나타내 두 함수들의 형태는 알지만 모수를 알지 못하고 비모수적(nonparametric)인 방법론에서는 어떠한 함수형태도 가정하지 않는다. 준모수적(semiparametric) 방법에서는 이들 중 일부는 모수적 가정을하고 나머지는 비모수적으로 추정한다. 앞서 언급된 확산과정을 이용하는 대부분의 연구들에서는 추세 함수와 변동성 함수의 특정한 형태를 가정하고 이론을 전개하며 어떠한 함수를 가정했느냐에 따라 모형의 이름이 정해졌다. 비모수적 그리고 준모수적 접근 방법들은 1990년대 후반에 데이터를 이용해 추세 함수나 변동성 함수를 추정하기 위해 제안된 것 들이다. 이 논문에서는 모수적인 접근법을 따를 때 확산과정 모형의 전이확률밀도 함수를 근사적이지만 구체적인 식으로 구하는 방법과 관련된 연구 결과들에 대해 살펴볼 것이다.

식 (1)의 추세 함수나 변동성 함수가 확률 과정 (stochastic process) X_t뿐만 아니라 시간 변수 t에도 의존하는 함수인 경우, 즉 $\mu(t,X_t;\theta)$또는 $\sigma(t,X_t;\theta)$인 경우에는 이 모형을 시간-비균질 (time-inhomogeneous) 확산과정이라 한다. 그뿐 아니라 확률 과정 X_t가 단일 변수가 아닌 m 차의 다변수 시간-균질 확산과정인 경우로 일반화 하면, $\mu(X_t;\theta)$는 $m\times 1$ 벡터의 추세함수들 $(\mu_1(X_t;\theta),\mu_2(X_t;\theta),...,\mu_m(X_t;\theta))^T$이고[1] $\sigma(X_t;\theta)$는 $m\times m$ 변동성 함수들의

[1] 여기에서 상첨자 T는 행렬의 전치(transpose)를 뜻한다.

행렬이며 W_t는 m 차원의 표준 브라운 운동 벡터가 된다. 이때 추세 함수 벡터나 변동성 함수 행렬의 구성요소들 중 시간에 의존하는 함수가 있으면 이는 다변수 시간 비균질 확산과정이 된다. 그리고 시간 균질 확산과정 모형에 점프항을 추가하면 점프 확산과정이 되며 추세 함수 벡터, 변동성 함수 행렬 또는 점프 부분의 구성 요소들 중 어느 하나라도 시간에 의존하면 시간-비균질 점프 확산과정이 된다.

확산과정 모형이 1900년에 Bachelier (1900)의 논문에서 처음 사용되기는 했지만, 이 모형이 본격적으로 이용되시 시작한 것은 1970년대 초반 Black and Scholes (1973)와 Merton (1973)의 연구부터라 할 수 있다. 이후 특히 재무경제학의 이론을 개발하는데 확산과정이 활발하게 활용됐다. 새로운 경제 이론을 개발하기 위해 여러 확산과정 모형들이 다양하게 이용되기는 했지만, 연구에서 활용된 확산과정들은 이들이 모형화하고 있는 실제 경제 변수들의 움직임을 잘 반영하고 있는지에 대한 실증적 검증은 거의 이루어지지 않았다. 1990년대 말부터 실증 자료를 이용해 확산과정 모형을 추정하는 새로운 방법론과 이론들이 개발되어 실증분석에 적용되기 시작했다. 각 방법론의 수많은 논문들 중에서 몇 가지만 소개하면, 최우추정법 (maximum likelihood estimation: MLE) (Pearson and Sun, 1994, Chen and Scott, 1993, Pedersen, 1995, Santa-Clara, 1995, 그리고 Durham and Gallant, 2002), 시뮬레이션 방법 (simulation method) (Gouriéroux *et al.*, 1993, 그리고 Duffie and Singleton, 1993), 일반적 적률법 (generalized method of moment: GMM) (Hansen and Scheinkman, 1995, Duffie and Glynn, 2004, Bibby and Sørenson, 1995, 그리고 Kesseler and Sørenson, 1999), 효율적 적률법 (efficient method of moment: EMM) (Gallant and Tauchen, 1996, 1998), 비모수적 방법 (nonparametric method) (Aït-Sahalia, 1996a, 1996b, Stanton, 1997, 그리고 Arapis and Gao, 2006), 준모수적 방법 (semiparametric method) (Aït-Sahalia, 1996a, 그리고 Kristensen, 2010), 그리고 베이지언 방법 (Bayesian method) (Eraker, 2001, Elerian *et al.*, 2001, 그리고 Jones, 2003a) 등이 있다.

여러 가지 추정법들 중에서 최우추정법을 이용해 구한 추정량이 가장 효율적이기 때문에 가능하다면 최우추정법을 이용하는 것이 좋다. 그런데 최우추정법으로 확산과정 모형을 추정하기 위해서는 확산과정의 전이확률밀도 (transition probability density) 함수를 알아야 하는데, 다변수 확산과정은 말할 것도 없이, 단일변수 시간균질 확산과정의 경우에도, Vasicek (1977, 이하 Vasicek 모형), Cox Ingersoll and Ross (1985, 이하 CIR 모형), Black and Scholes (1973, 이하 Black-Scholes-Merton 모형), 그리고 Ahn and Gao (1999)의

몇 가지 예들을 제외하고는, 대부분의 확산과정 모형의 전이확률밀도 함수가 알려져 있지 않다.

이러한 문제에 대한 대책으로 선구적인 논문 Aït-Sahalia (2002)에서 그는 단일변수 시간-균질 확산과정 모형의 알려져있지 않은 참 전이확률밀도 함수를 허마잇 (Hermite) 다항식을 이용한 급수 전개 (series expansion)로 근사적으로 그렇지만 매우 정확하게 구하는 방법을 개발했다. 이렇게 구한 허마잇 급수 전개식은 확률과정 변수 X_t가 취하는 값과 두 연속적인 관측변수들 사이의 시간 Δ의 이중 급수 전개가 되는데, Lee *et al.* (2014)는 이 식을 Δ의 오름차 순서로 다시 재배열했을 경우 얻는 식을 구체적으로 구했다. Aït-Sahalia (2002)에는 전이확률밀도가 Kolmogorov 편미분 방정식 (partial differential equation: PDE)을 만족한다는 사실을 이용해 구한, 두 번째 방식으로 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 식이 제시되어 있는데 이를 이용해 Aït-Sahalia (1999)에서는 다양한 단일변수 시간-균질 확산과정 모형들의 근사적 전이확률밀도 함수를 매우 정확하게 구할 수 있음을 보여주고 있다. Aït-Sahalia (2002)의 첫 번째 방식은 Egorov *et al.* (2003)에 의해 단일변수 시간-비균질 확산과정 모형의 전이확률밀도 함수를 허마잇 다항식을 이용한 급수 전개를 구하는 방법으로 확장됐고 두 번째 방법은 Li (2010)가 축소된 확산 과정 (damped diffusion process)에 적용했다. Bakshi and Ju (2005)와 Bakshi *et al.* (2006)는 각각 Aït-Sahalia (2002)의 두 방법론을 개선해 더 많은 종류의 단일변수 시간-균질 확산과정 모형들에 이용될 수 있도록 했다. Chang and Chen (2011)는 Aït-Sahalia (2002)의 두 번째 방식으로 구한 근사적 전이확률밀도 함수를 이용해 얻은 최우추정량 (maximum likelihood estimator)이 어떠한 점근적 성질을 갖는지 논의한다. Jensen and Poulsen (2002)은 Aït-Sahalia (2002)의 허마잇 급수 전개법과 기존의 다른 여러 방법들과 비교에 계산 속도와 정확성의 측면에서 허마잇 방법이 가장 우수하다는 것을 보였다. 또한 Aït-Sahalia (2002)의 두 번째 방식은 Choi (2009)가 단기이자율 자료를 이용해 일반적인 확산과정 모형과 국면전환을 결합한 모형을 추정할 때 그리고 DiPietro (2001)가 베이지언 방법론으로 확산과정 모형을 추정할 때 이용되기도 했다.

Aït-Sahalia의 아이디어는 다변수 확산과정 그리고 점프 확산과정까지 일반화 됐다. 다변수 확산과정 모형을 변환해 변동성 행렬을 항등행렬(identity matrix)로 만들 수 있는 경우는 축소가능 (reducible)하다고 하고 그러한 변환이 존재하지 않는 경우는 축소가능하지 않다(irreducible)고 한다. 그는 Aït-Sahalia (2008)에서 시간-균질 다변수 확산과정을 축소가능한 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 전이확률밀도 함수에 로그를 취한, 로그-전이확률밀도 함수를 급수 전개로 근사시키는 방법을 개발했다. 이 결과는 Aït-Sahalia and

Kimmel(2007, 2010)에서 각각 확률 세 종류의 변동성 (stochastic volatility) 모형들과 아홉 종류의 어파인 (affine) 확산과정 모형들에 적용됐고, Egorov *et al.* (2011)는 미국과 유럽 연합의 이자율들 사이의 4 요인 결합 어파인 기간구조 (term structure)를 제안하고 추정하는데 활용됐다. Aït-Sahalia (2008)의 이론은 시간-비균질 다변수 확산과정의 로그 전이확률밀도 함수와 전이확률밀도 함수를 구하는 방법으로 각각 Choi (2013, 2015)에서 일반화됐다. 또한 Stramer *et al.* (2010)는 Aït-Sahalia (2008)의 결과를 베이지언 방법론에 적용했고 Choi and Yuan (2018)과 Choi (2019b)는 국면전환 확률 변동성 모형을 최우추정법으로 추정할 때 이용했다.

점프 확산과정에 대해서도 전이확률밀도 함수를 근사적으로 구할 수 있는데 Yu (2007)는 다변수 시간-균질 점프 확산과정의 전이확률밀도 함수를 근사적이고 구체적인 식으로 구하는 방법을 제안했는데 Choi (2019a)는 이를 다변수 시간-비균질 점프 확산과정으로 일반화했을 뿐만 아니라 이 모형을 축소 가능한 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 Yu (2007)의 결과보다 더 개선된 방법을 알아냈다.

다른 여러 연구자들은 또 다른 접근 방식을 이용해 근사적 확산과정의 구체적인 전이확률밀도 함수식을 구하는 방법에 대한 결과를 발표하기도 했다. Aït-Sahalia and Yu (2006)는 확산과정을 포함하는 마르코프 과정의 근사적 전이확률밀도 함수를 안장점 근사 (saddlepoint approximation) 방법을 이용해, Filipović *et al.* (2013)는 다변수 시간-균질 어파인 점프 확산과정의 전이확률밀도 함수를 직교다항식 (orthonormal polynomial) 급수식으로, Li (2013)와 Li and Chen (2016)는 각각 시간-균질 다변수 확산과정과 시간-균질 다변수 점프 확산과정의 근사적 전이확률밀도 함수를 테일러 급수와 비슷한 방식으로, Yang *et al.* (2019)은 이또-테일러(Ito-Taylor) 전개법을 이용해, 그리고 Wan and Yang (2019)은 변동성 행렬에 조건부 변수 값을 대입한 것의 1/2제곱을 이용한 선형 변환으로 원래 확산과정을 변환한 후 허마잇 급수 전개법을 이용해 근사적 전이확률밀도 함수를 구체적인 식으로 구했다. 그렇지만 이러한 연구들에서 채택한 모형들은 위에서 설명한 Aït-Sahalia의 접근 방법을 따른 연구들에서 사용한 확산과정 모형들에 포함되는 특수한 경우들일 뿐만 아니라 새로운 방식을 적용해 구한 근사적 전이확률밀도 함수는 Aït-Sahalia의 접근 방법 또는 이를 일반화해 구한 결과와 사실상 매우 비슷한 결과임을 알 수 있다.

확산과정의 전이확률밀도 함수는 최우추정법으로 실증 분석 모형의 추정에 이용되는 것 이외에도 다양하게 활용될 수 있다. 예를 들면, 확산 과정 모형을 베이지언 방법으로 추정할 때 DiPietro (2001)와 Stramer *et al.* (2010)는 사후분포 (posterior distribution)에서 데이터를 생성할 때 근사적 전이확률밀도 함

수를 이용했고, Choi (2015)와 Wan and Yang (2019)는 근사적 전이확률밀도 함수로 유러피안 옵션 (European option)의 가격을 매우 정확하게 계산할 수 있다는 것을 보였다. 뿐만 아니라, Kristensen and Mele (2011)는 구하고자 하는 옵션의 가격과 보조적인 모형으로부터의 가격의 차를 구체적으로 근사시키는 방법으로 옵션의 가격을 계산했고, Li (2014)는 소시간 전개 (small-time expansion) 방법으로 그리고 Xiu (2014)는 허마잇 급수 전개로 구하는 방법으로 유러피안 옵션 가격을 구체적으로 구하는 것을 제안했다.

이 논문은 확산과정 모형의 근사적 전이확률밀도 함수나 로그-전이확률밀도 함수를 구하기 위해 Aït-Sahalia (2002)의 단일변수 시간-균질 확산과정에서 Choi (2013, 2015)의 다변수 시간-비균질 확산과정까지 좀 더 일반적인 모형들로 확장하는 과정에서 극복해야 할 문제들이 어떻게 해결됐으며 각 모형에 대해 근사적 (로그)-전이확률밀도 함수를 구하는 구체적인 방법들을 설명하고 있다. 지면의 제약으로 자세한 이론이나 이의 증명을 위한 가정들에 대한 설명은 최대한 줄이고 중요하고 핵심적인 결과들을 보여주며 원래 논문들에서 설명하지 않은 암묵적 사실들도 함께 설명하고 있다. 또한 이러한 중심이 되는 연구들에서 파생되거나 이들 연구를 이용한 관련된 논문들도 같이 소개하고 있다. 그리고 논문이 너무 길어지는 것을 막기위해 점프 확산과정 모형의 전이확률밀도 함수를 구하는 방법과 이론에 대한 내용은 다음 기회로 미루기로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 다음 장에서는 먼저 Aït-Sahalia (2002)가 처음 제안한 단일변수 시간-균질 확산과정의 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방법들에 대해 좀 더 자세히 설명하고 있다. 왜냐하면 이 논문에서 개발된 방법과 아이디어들은 이후 좀 더 일반적인 모형들로 확장할 때 활용되기 때문이다. 3장에서는 단일변수 시간-비균질 확산과정의 전이확률밀도 함수를 근사시키는 두 가지 방법에 대해 논의한다. 다변수 시간-균질 확산과정과 시간-비균질 확산과정의 근사적 (로그)-전이확률밀도 함수를 구하는 방법은 각각 4장과 5장에서 소개한다. 마지막 장은 결론이다.

2. 단일변수 시간-균질 확산과정의 근사적 전이확률밀도 함수

Aït-Sahalia (2002)에서 시작된 단일변수 시간-균질 확산과정의 전이확률밀도 함수를 근사적이지만 구체적인 식으로 구하는 방법과 이론은 최근 Choi (2019a)의 다변수 시간-비균질 점프 확산과정까지 모형을 조금씩 일반화 시키면서 여러 연구자들에 의해 확장 됐다. 그렇지만 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방법과 이론의 중심적인 아이디어들의 대부분은 단일변수 시간-균질

확산과정 모형을 이용해 설명이 된다. 그러므로 이 장에서는 단일변수 시간-균질 확산과정 모형의 근사적 전이확률밀도 함수를 구체적이고 정확하게 구하는 방법들에 대해, Aït-Sahalia (2002)에 설명되어 있지 않은 내용까지 자세히 설명하고 관련 연구들을 소개한다.

위에서 설명한 바와 같이 단일변수 시간-균질 확산과정은 다음과 같이 표현된다:

$$dX_t = \mu\,(X_t;\theta)\,dt + \sigma\,(X_t;\theta)\,dW_t. \tag{2}$$

여기에서 추세함수 $\mu\,(X_t;\theta)$와 변동성함수 $\sigma\,(X_t;\theta)$의 형태는 알고 있지만 모수들의 벡터 θ는 알지 못한다. 추세함수와 변동성 함수가 보통은 서로 다른 모수를 갖지만 공통적으로 같은 모수가 두 함수에 포함되는 경우도 있다. W_t는 표준 브라운운동이다.근사적 전이확률밀도 함수를 구하기 위해서는 대략 추세함수 $\mu\,(x;\theta)$와 변동성함수 $\sigma\,(x;\theta)$가 x에 대해 무한 번 미분이 가능하면[2] 된다. 하지만 확률 미분 방정식 (2)의 해가 유일하게 존재한다는 것이나 X_t의 전이확률밀도 함수가 미분 가능하고 특정한 성질들을 갖는다는 사실들을 보이기 위해 정칙 조건들 (regularity conditions)이 필요한데 이들은 Aït-Sahalia (2002)를 참고하기 바란다.

선행연구들에서 이용된 모형들 중에 가장 일반적인 모형은 $\mu\,(X_t;\theta) = \alpha_{-1}X_t^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 X_t^2 + \alpha_3 X_t^3$이고 $\sigma\,(X_t;\theta) = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^{\beta_3}}$인 모형으로 Choi (2009)가 Aït-Sahalia (1996b)가 제안한 모형에서 단기이자율이 높은 경우에 추세함수가 절대값이 큰 음의 기울기를 갖는 경우를 설명할 수 있도록 추세함수의 3차 항을 추가한 것이다. 많은 종류의 단일변수 확산과정 모형들이 선행 연구들에서 이용됐는데 대부분의 모형들이 Choi (2009)의 모형에 포함된다. 예를 몇 가지만 들면, $\mu\,(X_t;\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 X_t$일때, $\sigma\,(X_t;\theta) = \beta_2 X_t^{\beta_3}$는 Chan *et al.* (1992), Tauchen (1997) 그리고 Durham (2003), $\sigma\,(X_t;\theta) = \beta_2\sqrt{X_t}$는 CIR 모형으로 Gibbons and Ramaswamy (1993) 그리고 Pearson and Sun (1994), $\sigma\,(X_t;\theta) = \beta_2 X_t$는 Brennan and Schwartz (1979) 그리고 Courtadon (1982)가 이용했으며, $\sigma\,(X_t;\theta) = \beta_2$는 Vasicek 모형이다. 추세함수와 변동성 함수 가 각각 $\mu\,(X_t;\theta) = \alpha_1 X_t$이고 $\sigma\,(X_t;\theta) = \beta_2 X_t$인 경우는 Black-Scholes-Merton 모형이고 $\mu\,(X_t;\theta) = 0$이고 $\sigma\,(X_t;\theta) = \beta_2 X_t$인 경우는 Dothan (1978)이 $\sigma\,(X_t;\theta) = \beta_2 X_t^{3/2}$인 경우는 Constantinides and Ingersoll (1984)와 Cox *et al.* (1980)이 사용했다.

[2]급수 전개식으로 표현되는 근사적 전이확률밀도 함수는 사실 낮은 차수의 근사식으로도 매우 정확하게 참 전이확률밀도 함수를 근사시킬 수 있기 때문에, 실용적인 측면에서는, 사실 무한 번 미분가능하지 않아도 된다.

모형 (2)는 연속시간 모형이지만 우리가 관측할 수 있는 데이터는 이산적이다. 시간적으로 연속적인 두 개의 관측값들 사이의 시간 간격을 Δ라 하면, 확산과정 X_t는 $t = i\Delta,\ i = 0, 1, \cdots, n$ 시점들에 관측된다, 즉 $x_{i\Delta},\ i = 0, 1, ..., n$. 이 데이터에 대한 우도 함수는

$$p\left(x_0, x_\Delta, x_{2\Delta} ..., x_{n\Delta} : \theta\right)$$

로 나타낼 수 있으며 이는 다시 베이즈 규칙 (Bayes'rule)에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$p\left(x_{n\Delta}|x_{(n-1)\Delta}, \cdots, x_\Delta, x_0; \theta\right) p\left(x_{(n-1)\Delta}|x_{(n-2)\Delta} \cdots, x_\Delta, x_0; \theta\right) \cdots p\left(x_\Delta|x_0; \theta\right) p\left(x_0; \theta\right).$$

그리고 확산과정이 마르코프 (Markov) 성질을 갖는다는 사실을 이용하면 위 식은

$$p\left(x_{n\Delta}|x_{(n-1)\Delta}; \theta\right) p\left(x_{(n-1)\Delta}|x_{(n-2)\Delta}; \theta\right) \cdots p\left(x_{2\Delta}|x_\Delta; \theta\right) p\left(x_\Delta|x_0; \theta\right) p\left(x_0; \theta\right)$$

로 더 간단히 나타낼 수 있다. 여기에서 첫 번째 관측치를 무시하고[3] 로그를 취하면

$$l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[p\left(x_{i\Delta}|x_{(i-1)\Delta}; \theta\right)\right] \tag{3}$$

와 같은 로그우도 함수를 얻을 수 있다[4].

확산과정 X_t의 전이확률밀도 함수는 이전 기의 X_t를 조건부 변수로 하는 현재 X_t의 조건부 확률밀도 함수로 위 로그우도 함수에서는 $p\left(x_{i\Delta}|x_{(i-1)\Delta}; \theta\right),\ i = 1, ..., n$들이다. 그러므로 확산과정의 전이확률밀도 함수를 알면 이를 이용해 (3)를 극대화하는 모수 θ의 추정량, 최우추정량 (maximum likelihood estimator)을 구할 수 있다. 그렇지만 CIR 모형, Black-Scholes-Merton 모형, 그리고 Vasicek 모형과 같이 몇 가지 예외를 제외하고는 확산과정의 참 전이확률밀도 함수는 알려져있지 않다.

이러한 문제를 해결하기 위해 Aït-Sahalia (2002)는 단일변수 시간-균질 확산과정의 알려져있지 않은 참 전이확률밀도 함수를 정규분포의 확률밀도 함수 주변으로 허마잇 다항식 (Hermite polynomial)을 이용한 급수 전개 (series expansion)로 근사적으로 그렇지만 구체적이고 정확한 식으로 구하는 방법과

[3]최우추정법을 이용해 모형을 추정할 때 첫 번째 관측치의 로그우도값은 전체 우도함수의 값에 크게 영향을 주지 않는다.

[4]여기에서는 편의상 두 연속적인 관측 값들 사이의간격이 모두 Δ로 같다고 가정했으나, 관측 값들 사이의 간격이 다른 경우는 이를 고려해 우도함수를 구할 수 있다.

이론을 확립했다. 이 방법은 추세함수와 변동성 함수가 여러 번 미분이 가능한 함수이기만 하면 적용할 수 있다. 일반적으로, 주어진 두 연속된 관측 값들 사이의 시간 간격 Δ에 대해, 확산과정 X_t의 전이확률밀도 함수는 정규분포 함수의 확률밀도와 차이가 크기 때문에 Aït-Sahalia (2002)는 먼저 확산과정 X_t를 두 번 변환해 변환된 확산과정의 전이확률밀도 함수가 정규분포의 확률밀도 함수와 더 가깝게 만든 후에 허마잇 급수 전개를 한다. 물론 우리가 필요한 것은 X_t의 전이확률밀도인데 이는 변수 변환법 (change of variable)을 이용해 어렵지 않게 구할 수 있다.

이 방법에 대해 좀 더 자세히 살펴보면 먼저 X_t를 아래의 램퍼티 (Lamperti) 변환

$$Y_t \equiv \gamma(X_t;\theta) = \int^{X_t} \frac{1}{\sigma(u;\theta)} du \tag{4}$$

으로 변환하고 Ito 보조정리를 적용해 확산과정 Y_t를 얻는다 즉,

$$dY_t = \mu_Y(Y_t;\theta)\,dt + dW_t$$

여기에서

$$\mu_Y(y;\theta) = \frac{\mu\left(\gamma^{inv}(y;\theta);\theta\right)}{\sigma\left(\gamma^{inv}(y;\theta);\theta\right)} - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(\gamma^{inv}(y;\theta);\theta\right) \tag{5}$$

이고[5] 변동성 함수는 1이다.

변환된 확산과정 Y_t의 전이확률밀도 함수는 Δ가 작을 때 $Y_{t_0} = y_0$의 주변으로 너무 몰려있기 때문에 Y_t를 Z_t로 한 번 더 변환해야 한다[6]:

$$Z_t = \frac{Y_t - y_0}{\sqrt{\Delta}}.$$

이 변환은 $\sqrt{n}$속도로 일치성 (consistency)을 갖는 추정량에 $\sqrt{n}$을 곱해 점근적 분포를 구하는 것과 비슷한 것이다. 이렇게 변환된 확산과정 Z_t의 전이확률밀도 함수는 정규분포의 확률밀도 함수와 매우 가깝기 때문에 이를 정규분포 함수 주변으로 허마잇 급수 전개를 하면 낮은 차수의 급수 전개로도 매우 정확하게 근사적 전이확률밀도 함수를 얻을 수 있다.

---

[5] 여기에서 상첨자 inv는 역변환을 뜻하는 것으로 $\gamma^{inv}(y;\theta)$는 $\gamma(x;\theta)$의 역변환이다.

[6] 여기에서 시간 t_0일 때 $Y_{t_0} = y_0$에서 시간이 Δ만큼 지난 시점의 확산과정 $Y_t = y$의 전이확률밀도 함수를 고려하는 것으로 $t - t_0 = \Delta$이다.

2.1. 허마잇 급수 전개 방법

단일변수 허마잇 다항식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H_j(z) \equiv \phi(z)^{-1}\frac{d^j}{dz^j}\phi(z) = e^{z^2/2}\frac{d^j}{dz^j}\left(e^{-z^2/2}\right),$$

여기에서 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$는 표준정규분포의 확률밀도함수다. 하첨자 j는 음이아닌 정수 값으로 몇 가지 허마잇 다항식을 보면 $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = -z$, $H_2(z) = z^2-1$, $H_3(z) = -z^3+3z$, $H_4(z) = z^4-6z^2+3$, $H_5(z) = -z^5+10z^3-15z$ 그리고 $H_6(z) = z^6-15z^4+45z^2-15$ 등이다. 허마잇 급수들의 모임은 직교기저 (orthogonal basis)로

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(z)H_j(z)\phi(z)\,dz = \begin{cases} i! & \text{만일 } i=j \\ 0 & \text{다른 모든 경우엔} \end{cases}$$

를 만족한다.

확산과정 Z_t의 전이확률밀도 함수를 $\phi(z)$를 주변으로 J차까지 허마잇 급수 전개를 하면

$$p_Z^{(J)}(\Delta, z|y_0;\theta) \equiv \phi(z)\sum_{j=0}^{J}\eta_Z^{(j)}(\Delta, y_0)H_j(z) \tag{6}$$

로 쓸 수 있다. 이 식은 변수 변환법으로 $p_X^{(J)}(\Delta, x|x_0;\theta)$로 변환될 수 있다. 확산과정 (2)가 정칙 조건들을 만족하면 $p_X^{(J)}(\Delta, x|x_0;\theta)$가 X_t의 알려져 있지 않은 참 전이확률밀도 함수 $p_X(\Delta, x|x_0;\theta)$로 수렴한다는 다음의 정리를 증명할 수 있다.

Theorem 1. *정칙 조건들이 만족될 때, 어떤* $\bar{\Delta} > 0$*가 존재해* $\Delta \in (0, \bar{\Delta})$*를 만족하는 모든* Δ*와,* $\theta \in \Theta$ *그리고* $(x, x_0) \in D_X^2$*에 대해* $J \to \infty$*일때*

$$p_X^{(J)}(\Delta, x|x_0;\theta) \to p_X(\Delta, x|x_0;\theta).$$

□

또한 위 정리의 정칙 조건들에 몇 가지 가정을 추가하면 $J \to \infty$일때 $p_X^{(J)}\left(\Delta, x_{i\Delta}|x_{(i-1)\Delta};\theta\right)$를 이용해 구한 최우추정량 $\hat{\theta}_n^{(J)}$은 $p_X(\Delta, x|x_0;\theta)$로 계산한 최우추정량 $\hat{\theta}_n$으로 확률적인 수렴을 하고 후자의 점근적인 모든 성질들을 전자가 그대로 갖는다는 것을 보일 수 있다.

Theorem 2. *정칙 조건들이 만족될 때,* $\hat{\theta}_n^{(J)}$ *이* $p_X^{(J)}\left(\Delta, x_{i\Delta}|x_{(i-1)\Delta};\theta\right)$*를 이용해 구한 최우추정량이고* $\hat{\theta}_n$ *이* $p_X\left(\Delta, x|x_0;\theta\right)$*로 구한 최우추정량이면 즉,*

$$\hat{\theta}_n^{(J)} = \arg\max_{\theta} l_n^{(J)}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[p_X^{(J)}\left(\Delta, x_{i\Delta}|x_{(i-1)\Delta};\theta\right)\right] \text{ 이고}$$

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta} l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[p_X\left(\Delta, x_{i\Delta}|x_{(i-1)\Delta};\theta\right)\right] \text{ 이면}$$

$J \to \infty$ *일때*

$$\hat{\theta}_n^{(J)} \to_p \hat{\theta}_n$$

이고 $\hat{\theta}_n^{(J)}$ *는* $\hat{\theta}_n$ *의 모든 점근적인 성질들을 만족한다.*□

이 결과가 뜻하는 바는, 일반적으로 참 전이확률밀도 함수를 알 수 없기에 $\hat{\theta}_n$를 구할 수는 없지만, 그러한 경우에는 이를 대신해 $\hat{\theta}_n^{(J)}$를 이용할 수 있다는 것이다.

식 (6)에서 급수식의 계수들 $\eta_Z^{(j)}(\Delta, y_0)$만 구하면 되는데 이들은 허마잇 다항식의 직교성 (orthogonality)을 이용해 구할 수 있다. 예를 들어, 계수 $\eta_Z^{(k)}(\Delta, y_0)$를 구하기 위해 식 (6) 양 변에 $H_k(z)$를 곱하고 적분하면

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(z)\, p_Z^{(J)}(\Delta, z|y_0;\theta)\, dz &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \sum_{j=0}^{J} \eta_Z^{(j)}(\Delta, y_0)\, H_j(z)\, H_k(z)\, dz \\ &= \eta_Z^{(k)}(\Delta, y_0) \cdot k!. \end{aligned}$$

이로부터

$$\eta_Z^{(k)}(\Delta, y_0) = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(z)\, p_Z^{(J)}(\Delta, z|y_0;\theta)\, dz$$

임을 알 수 있다.

이 결과를 변수변환을 이용해 다시 쓰면 $z = (y - y_0)/\sqrt{\Delta}$이므로 $p_Z^{(J)}(\Delta, z|y_0;\theta) = \sqrt{\Delta} p_Y^{(J)}\left(\Delta, \sqrt{\Delta} z + y_0 | y_0;\theta\right)$이고

$$\begin{aligned}\eta_Z^{(k)}(\Delta,y_0) &= \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{\infty} H_k(z)\sqrt{\Delta}p_Y^{(J)}\left(\Delta,\sqrt{\Delta}z+y_0|y_0;\theta\right)dz \\ &= \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{\infty} H_k\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)p_Y(\Delta,y|y_0)\,dy \\ &= \frac{1}{k!}E\left[H_k\left(\frac{Y_t-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\middle| y_0\right].\end{aligned}$$

여기에서 $\eta_Z^{(k)}(\Delta,y_0)$는 확산과정 Y_t의 함수[7]의 조건부 기댓값을 계산하면 구할 수 있다. 이러한 조건부 기댓값은 확산과정 Y_t의 무한소 작용소 (infinitesimal operator)를 이용해 원하는 차수 까지 급수 전개로 근사시킬 수 있다. Y_t의 무한소 작용소 A_Y는

$$A_Y \circ f(\Delta,y,y_0) = \mu_Y(y;\theta)\frac{\partial f(\Delta,y,y_0)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\Delta,y,y_0)}{\partial y^2}$$

이다. Y_t 변수에 대해 무한번 미분 가능한 Y_t의 함수 $f(\Delta,Y_t,y_0)$의 조건부 기댓값은 다음과 같이 임의의 K차 까지 근사시킬 수 있다[8]:

$$E\left[f(\Delta,Y_t,y_0)|y_0\right] = \sum_{i=0}^{K}\frac{1}{i!}A_Y^i \circ f(\Delta,y,y_0)\Big|_{y=y_0}\Delta^i + O\left(\Delta^{K+1}\right).$$

Y_t의 추세함수 $\mu_Y(y;\theta)$를 y에 대해 k번 미분하고 y에 y_0를 대입하고 m제곱한 것을 $\mu_Y^{[k]m} = \left(\partial^k\mu_Y(y_0;\theta)/\partial y_0^k\right)^m$로 나타내자. 허마잇 급수 전개 (6)의 첫 일곱 개의 계수 $\eta_Z^{(j)}(\Delta,y_0)$, $j=0,\ldots 6$을 $K=3$차 까지 근사시켜 구하면 먼저 $\eta_Z^{(0)}=1$이고 나머지 결과는

[7] 허마잇 다항식 H_k는 알고 있고 y_0와 Δ는 상수이기 때문에 $H_k\left(\frac{Y_t-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)$를 확률변수 Y_t의 함수로 볼 수 있다.

[8] 이는 미분 작용소 (differential operator)를 이용해 테일러 급수 전개 (Taylor sereis expansion)를 하는 것과 비슷하다. 다만 여기에서는 확산과정 Y_t의 함수에 대한 조건부 기댓값을 구하기 위해서 미분 작용소가 아니라 무한소 작용소를 이용해야 한다.

$$
\begin{aligned}
\eta_Z^{(1,3)} &= -\mu_Y \Delta^{1/2} - \left(2\mu_Y \mu_Y^{[1]} + \mu_Y^{[2]}\right)\Delta^{3/2}/4 \\
&\quad - \left(4\mu_Y \mu_Y^{[1]2} + 4\mu_Y^2 \mu_Y^{[2]} + 6\mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[2]} + 4\mu_Y \mu_Y^{[3]} + \mu_Y^{[4]}\right)\Delta^{5/2}/24 \\
\eta_Z^{(2,3)} &= \left(\mu_Y^2 + \mu_Y^{[1]}\right)\Delta/2 + \left(6\mu_Y^2 \mu_Y^{[1]} + 4\mu_Y^{[1]2} + 7\mu_Y \mu_Y^{[2]} + 2\mu_Y^{[3]}\right)\Delta^2/12 \\
&\quad + \left(28\mu_Y^2 \mu_Y^{[1]2} + 28\mu_Y^2 \mu_Y^{[3]} + 16\mu_Y^{[1]3} + 16\mu_Y^3 \mu_Y^{[2]} + 88\mu_Y \mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[2]}\right. \\
&\quad \left. + 21\mu_Y^{[2]2} + 32\mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[3]} + 16\mu_Y \mu_Y^{[4]} + 3\mu_Y^{[5]}\right)\Delta^3/96 \\
\eta_Z^{(3,3)} &= -\left(\mu_Y^3 + 3\mu_Y \mu_Y^{[1]} + \mu_Y^{[2]}\right)\Delta^{3/2}/6 - \left(12\mu_Y^3 \mu_Y^{[1]} + 28\mu_Y \mu_Y^{[1]2}\right. \\
&\quad \left. + 22\mu_Y^2 \mu_Y^{[2]} + 24\mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[2]} + 14\mu_Y \mu_Y^{[3]} + 3\mu_Y^{[4]}\right)\Delta^{5/2}/48 \\
\eta_Z^{(4,3)} &= \left(\mu_Y^4 + 6\mu_Y^2 \mu_Y^{[1]} + 3\mu_Y^{[1]2} + 4\mu_Y \mu_Y^{[2]} + \mu_Y^{[3]}\right)\Delta^2/24 \\
&\quad + \left(20\mu_Y^4 \mu_Y^{[1]} + 50\mu_Y^3 \mu_Y^{[2]} + 100\mu_Y^2 \mu_Y^{[1]2} + 50\mu_Y^2 \mu_Y^{[3]} + 23\mu_Y \mu_Y^{[4]}\right. \\
&\quad \left. + 180\mu_Y \mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[2]} + 40\mu_Y^{[1]3} + 34\mu_Y^{[2]2} + 52\mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[3]} + 4\mu_Y^{[5]}\right)\Delta^3/240 \\
\eta_Z^{(5,3)} &= -\left(\mu_Y^5 + 10\mu_Y^3 \mu_Y^{[1]} + 15\mu_Y \mu_Y^{[1]2} + 10\mu_Y^2 \mu_Y^{[2]}\right. \\
&\quad \left. + 10\mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[2]} + 5\mu_Y \mu_Y^{[3]} + \mu_Y^{[4]}\right)\Delta^{5/2}/120 \\
\eta_Z^{(6,3)} &= \left(\mu_Y^6 + 15\mu_Y^4 \mu_Y^{[1]} + 15\mu_Y^{[1]3} + 20\mu_Y^3 \mu_Y^{[2]} + 15\mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[3]} + 45\mu_Y^2 \mu_Y^{[1]2}\right. \\
&\quad \left. + 10\mu_Y^{[2]2} + 15\mu_Y^2 \mu_Y^{[3]} + 60\mu_Y \mu_Y^{[1]}\mu_Y^{[2]} + 6\mu_Y \mu_Y^{[4]} + \mu_Y^{[5]}\right)\Delta^3/720
\end{aligned}
$$

이다. 이와 같이 $\eta_Z^{(j)}(\Delta, y_0)$를 K차까지 근사시킨 것을 $\eta_Z^{(j,K)}(\Delta, y_0)$라 하고[9] 식 (6)에 대입하면 확산과정 Z_t의 전이확률밀도 함수 $p_Z(\Delta, z|y_0;\theta)$를 허마잇 급수 전개식으로 근사시킨

$$
p_Z^{(J,K)}(\Delta, z|y_0;\theta) \equiv \phi(z)\sum_{j=0}^{J}\eta_Z^{(j,K)}(\Delta, y_0)H_j(z) \tag{7}
$$

를 얻는다.

[9] $\eta_Z^{(j,K)}(\Delta, y_0)$를 구하기 위해서는 $\mu_Y(y;\theta)$를 y에 대해 여러번 미분하고 제곱하는 과정이 필요하기 때문에 이를 손으로 계산하는 것 보다 미분 등의 계산을 정확하게 계산한 결과를 보여주는 Maple이나 Mathematica 같은 컴퓨터 프로그램을 이용하는 것이 좋다.

변수 변환법을 이용하면 Y_t의 근사적 전이확률밀도 함수

$$p_Y^{(J,K)}(\Delta, y|y_0;\theta) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} p_Z^{(J,K)}\left(\Delta, \frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\middle| y_0;\theta\right) \tag{8}$$

와 X_t의 근사적 전이확률밀도 함수

$$p_X^{(J,K)}(\Delta, x|x_0;\theta) = \frac{1}{\sigma(x;\theta)} p_Y^{(J,K)}(\Delta, \gamma(x;\theta)|\gamma(x_0;\theta);\theta). \tag{9}$$

를 쉽게 구할 수 있다. 이와 같은 접근 방식을 허마잇 급수 전개 방식이라 부르자.

Jensen and Poulsen (2002)은 허마잇 급수 전개법, 오일러 (Euler) 방법, 시뮬레이션을 이용한 방법 (Simulations), 이항 근사법 (binomial tree) 그리고 전이확률밀도 함수가 만족하는 편미분방정식을 수치적으로 풀어내는 방법 (PDE)을 이용해 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 것을 비교했는데 Aït-Sahalia (2002)도 같은 실험을 해 225쪽에 결과를 요약해 보여주는 그래프를 그렸다. 이 실험에서는 위의 방법들을 참 전이확률밀도 함수를 알고 있는 Vasicek 모형, CIR 모형, 그리고 Black-Scholes-Merton 모형에 적용해 구한 근사적 전이확률밀도 함수와 참 전이확률밀도 함수의 차이의 최대값에 로그를 취한 값과 근사적 전이확률밀도 함수를 구하기 위해 소요된 시간을 계산했다. 그 결과 계산 속도와 정확성을 모두 고려했을 때 허마잇 방법이 가장 우수하다는 것을 보였다. Binh (2005) 또한 확산과정을 추정하는 다양한 방법들을 소개하고 있다.

허마잇 급수 전개식의 계수들 $\eta_Z^{(j,K)}(\Delta, y_0)$를 구하기 위해 $\mu_Y(y;\theta)$를 구체적인 식으로 찾아 미분해야 한다. 그런데 (5)에서 볼수 있듯, 이를 위해서는 (4)의 적분, 즉 $\gamma(X_t;\theta)$을 구체적인 식으로 구하고 이의 역함수를 알아내야 한다. 위의 예에서 봤듯, 예를 들어 $\sigma(X_t;\theta) = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^{\beta_3}}$인 경우에는 이것이 가능하지 않다. Bakshi and Ju (2005)는 이러한 문제를 개선하는 방안을 제안했다. 그런데 사실 허마잇 급수 전개식을 구할 때는 적분식 (4)를 구체적으로 구할 필요가 없다. 왜냐하면 우리가 필요한 것은 X_t의 근사적 전이확률밀도 함수로, 이를 구하기 위해 변수 변환을 하는 과정에서 $y = \gamma(x;\theta)$를 y변수에 대입하면, 허마잇 급수 계수에 관여된 $\gamma^{inv}(y;\theta)$는 x가 되기 때문이다. 예를 들어 $\mu_Y(y;\theta) = \frac{\mu(\gamma^{inv}(y;\theta);\theta)}{\sigma(\gamma^{inv}(y;\theta);\theta)} - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\gamma^{inv}(y;\theta);\theta)$에서 $y = \gamma(x;\theta)$를 대입하면 $\mu_Y(\gamma(x;\theta);\theta) = \frac{\mu(x;\theta)}{\sigma(x;\theta)} - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x;\theta)$가 되어 $\gamma^{inv}(y;\theta)$를 구할 필요가 없게 된다. 이와 비슷한 일이 허마잇 급수의 계수들 모두에서 일어난다.

2.2. Kolmogorov 편미분방정식 방법

Aït-Sahalia (2002)는 허마잇 급수 전개식 (7)에서 $J=\infty$로 하고 이 식을 Δ의 오름차순으로 다시 정리하면 다른 형태의 근사적 전이확률밀도 함수를 얻을 수 있다고 설명하며, Y_t의 근사적 전이확률밀도 함수의 다른 형태를 제시했다. 그런데 실제로 Δ의 오름차순으로 (7)을 다시 정리해 구한 결과는 Lee *et al.* (2014)에 구체적인 식으로 제시되어 있다. 사실 Aït-Sahalia (2002)가 제시한 Y_t의 다른 형태의 근사적 전이확률밀도 함수를 구하기 위해서는 먼저 $J=\infty$일 때 허마잇 급수 전개식을 Δ의 오름차순으로 다시 정리하면 얻으리라 예상되는 식을

$$p_Y^{(K)}(\Delta, y|y_0) = \Delta^{-\frac{1}{2}}\phi\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\exp\left(\int_{y_0}^{y}\mu_Y(\omega;\theta)\,d\omega\right)\sum_{k=0}^{K}c_Y^{(k)}(y|y_0;\theta)\frac{\Delta^k}{k!} \tag{10}$$

와 같이 세운다. 그리고 식 (10)을 확산과정 Y_t의 전이확률밀도 함수가 만족하는 Kolmogorov 전진 (forward) 편미분 방정식[10]

$$\frac{\partial p_Y(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial\Delta} = -\frac{\partial}{\partial y}\{\mu_Y(y;\theta)\,p_Y(\Delta, y|y_0;\theta)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_Y(\Delta, y|y_0;\theta)$$

에 대입하고 양 변에서 Δ의 같은 차수들의 계수들이 같다는 사실로부터 식 (10)의 계수들 $c_Y^{(k)}(y|y_0;\theta)$이 만족하는 2차 편미분 방정식을 얻는다. 이는 Y_t의 전이확률밀도 함수가 후진 (backward) 편미분 방정식을 만족한다는 것을 이용해 풀면 다음과 같이 $c_Y^{(0)}(y|y_0;\theta)=1$이고 $k\geq 1$일 때

$$\begin{aligned} & c_Y^{(k)}(y|y_0;\theta) \\ &= \frac{k}{(y-y_0)^k}\int_{y_0}^{y}(w-y_0)^{k-1}\left\{\lambda_Y(w;\theta)\,c_Y^{(k-1)}(w|y_0;\theta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c_Y^{(k-1)}(\omega|y_0)}{\partial\omega^2}\right\}dw \end{aligned} \tag{11}$$

[10]단일변수 확산과정 $dX_t = \mu(X_t;\theta)dt + \sigma(X_t;\theta)dW_t$의 전이확률밀도 함수 $p(\Delta, x|x_0)$는 Kolmogorov 전진 편미분 방정식 $\frac{\partial p(\Delta,x|x_0)}{\partial\Delta} = -\frac{\partial}{\partial x}\{\mu(x;\theta)\,p(\Delta,x|x_0)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\sigma^2(x;\theta)\,p(\Delta,x|x_0)\}$과 후진 (backward) 편미분 방정식 $\frac{\partial p(\Delta,x|x_0)}{\partial\Delta} = \mu(x_0;\theta)\frac{\partial p(\Delta,x|x_0)}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\sigma^2(x_0;\theta)\frac{\partial^2 p(\Delta,x|x_0)}{\partial x_0^2}$을 만족한다.

이므로 식 (10)의 계수들을 구할 수 있는 연쇄적인 식을 구하게 된다[11]. 위 연쇄식에서 $\lambda_Y(y;\theta) = -\frac{1}{2}\left[\mu_Y^2(y;\theta) + \frac{\partial \mu_Y(y;\theta)}{\partial y}\right]$이고 식 (11)를 이용해 원하는 차수까지[12] $p_Y^{(K)}(\Delta, y|y_0)$를 구체적인 식으로 얻을 수 있다. 이렇게 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방식을 콜로고로프 편미분방정식 방법이라 부르자.

근사식 (10)을 선행 연구들에서 사용된 다양한 단일변수 확산과정들에 적용해 근사적 전이확률밀도 함수를 구하고 K가 1 또는 2인 경우에도 참 전이확률밀도 함수와 매우 가깝다는 사실을 Aït-Sahalia (1999)에서 보였다. 또한 그렇게 구한 근사식에 많이 이용되는 단기 이자율 자료들 중 하나인 미국 연방자금 금리 (federal fund rate)에 응용해 구한 최우추정량 또한 참 전이확률밀도 함수를 이용했을 때와 차이가 별로 없다는 것도 증명했다. Chang and Chen (2011)은 근사식 (10)을 활용해 구한 최우추정량의 점근적 성질에 대해, Δ가 고정되고 $K \to \infty$ 그리고 표본의 크기 $n \to \infty$일 때 또는 K가 고정되고 $n\Delta \to \infty$이면서 $n \to \infty$이고 $\Delta \to 0$일 때로 나누어, 이론을 개발했다. 허마잇 급수 전개와 달리 (10)을 이용하기 위해서는 $\mu_Y(y;\theta)$를 구체적으로 구해야 한다. 그렇지만 위에서 설명한대로 변동성 함수의 종류에 따라 이것이 가능하지 않을 수 있다. 이러한 문제에 대한 해결책을 Bakshi *et al.* (2006)가 제안했는데 사실상 이 방법은 뒤에서 다변수 확산과정의 경우에서 자세히 설명할, Aït-Sahalia (2008)가 확립한 방법을 단일변수 모형에 적용한 것이다. 이 이외에도 DiPietro (2001)는 베이지언 방법론으로 확산과정을 추정하기 위해 사후밀도함수 (posteriordensity function)를 구할 때, Choi (2009)는 국면전환과 확산과정 모형을 결합한 모형들을 단기 이자율에 적용해 최우추정법으로 추정하기위한 우도함수를 구할 때, 그리고 Li (2010)가 축소된 확산과정 (damped diffusion process)을 추정하기 위해 근사식 (10)을 이용했다.

3. 단일변수 시간-비균질 확산과정의 근사적 전이확률밀도 함수

여러 경제, 재무 관련 변수들의 움직임이 시간 변수에 의존한다는 증거들이 많이 있다. 미국에서 연방 공개 시장 위원회의 회의가 있는 날이나 주요 거시경제 지표들이 발표되는 때 근처에 다른 만기를 가진 모든 채권들의 이

[11]아래에서 설명하겠지만 이는 다변수 시간-균질 확산과정의 로그-전이확률밀도 함수의 근사식을 구할 때 이용되는 핵심적인 아이디어다.

[12]허마잇 급수 전개와 비슷하게 이 연쇄식은 다소 복잡한 미분과 적분을 반복적으로 계산하는 것을 포함하기 때문에 손으로 계산하는 것 보다는 Maple이나 Mathematica와 같은 컴퓨터 프로그램을 이용하는 것이 낫다.

자율의 변동성이 증가하고 (Bartolini *et al.*, 2002, 그리고 Piazzesi, 2005), 후자의 경우에는 환율의 변동성도 증가한다고 알려져있다 (Andersen *et al.*, 2003). 주가 수익률의 변동성 (Lockwood and Linn, 1990)과 환율 수익률의 변동성 (Bollerslev *et al.*, 2000), 미재무성 채권의 선물가 (Andersen and Bollerslev, 1997) 그리고 전기 가격 (Misiorek *et al.*, 2006)이 하루 동안 보이는 움직임의 규칙성 또한 잘 알려져있다. 주가 (Hansen and Lunde, 2005), 환율 (Jordan and Jordan, 1991), 미재무성 채권의 선물가 (Andersen and Bollerslev, 1998) 그리고 전기 가격 (Lucia and Schwartz, 2002)의 달력효과 (calendar effects)또한 보고되어 있다. 일부 시계열 데이터들은 일정한 규칙성(seasonality)이나 시간에 따른 추세 (trend)를 보이는데 Phillips (2001)와 Franses (1996)는 이러한 것들을 직접적으로 모델링하는 것의 중요성에 대해 논의한다.

시간-비균질 확산과정 모형은 이와 같이 시간에 의존하는 데이터의 움직임을 설명할 수 있는 하나의 방법이다. 모형 (2)에서 추세함수나 변동성 함수가 확률과정 X_t뿐만 아니라 시간 변수 t에도 의존하는 함수인 경우 다음과 같이 단일변수 시간-비균질 확산과정 모형이 된다:

$$dX_t = \mu(t, X_t; \theta)\, dt + \sigma(t, X_t; \theta)\, dW_t. \tag{12}$$

이 경우에 허마잇 급수 전개식으로 전이확률밀도 함수를 근사시키는 결과는 Egorov, Li, and Xu(2003)에서 찾을 수 있다. 이들은 Aït-Sahalia(2002)의 결과를 그대로 모형 (12)에 적용했다. 먼저 X_t를

$$y = \gamma(t, x; \theta) \equiv \int^x \frac{1}{\sigma(t, \omega; \theta)} d\omega$$

를 이용해 Y_t로 변환했다. 변동성 함수에 t가 추가된 것 이외에는 전과 같다. Ito 보조정리에 따라

$$dY_t = \mu_Y(t, Y_t; \theta)\, dt + dW_t$$

이고 여기에서 $\mu_Y(t, y) = \frac{\mu\left(t, \gamma^{inv}(t,y);\theta\right)}{\sigma(t, \gamma^{inv}(t,y);\theta)} - \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma\left(t, \gamma^{inv}(t,y);\theta\right)}{\partial x} + \frac{\partial \gamma\left(t, \gamma^{inv}(t,y);\theta\right)}{\partial t}$이다.

3.1. 허마잇 급수 전개 방법

Y_t에서 Z_t로의 두 번째 변환은 시간-균질의 경우과 같다:

$$z \equiv \frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}.$$

참 전이확률밀도 함수 $p_Z(t,z|t_0,y_0;\theta)$의 허마잇 급수 전개식은

$$p_Z^{(J)}(t,z|t_0,y_0;\theta) \equiv \phi(z)\sum_{j=0}^{J}\eta_Z^{(j)}(t,t_0,y_0;\theta)H_j(z) \tag{13}$$

와 같이 쓸 수 있고 이 급수의 계수 또한 조건부 기댓값으로 나타낼 수 있다:

$$\eta^{(j)}(t,t_0,y_0;\theta) = (1/j!)E\left[H_j\left(\frac{Y_t-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\middle| t_0,y_0\right].$$

이 조건부 기댓값 역시 확산과정 Y_t의 무한소 작용소 A_Y를 이용해 원하는 차수까지 근사시킬 수 있는데 이 때 사용되는 무한소 작용소는 시간 변수를 고려해

$$A_Y\circ f(t,y,t_0,y_0) = \frac{\partial f(t,y,t_0,y_0)}{\partial t} + \mu_Y(t,y;\theta)\frac{\partial f(t,y,t_0,y_0)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,y,t_0,y_0)}{\partial y^2}$$

가 된다. 계수 $\eta^{(j)}(t,t_0,y_0;\theta)$를 K차까지 근사시켜 (13)에 대입하면 다음과 같은 근사적 전이확률밀도 함수를 얻게 된다:

$$p_Y^{(J,K)}(t,y|t_0,y_0;\theta)$$
$$= \Delta^{-\frac{1}{2}}\phi\left(\frac{y-y_0}{\Delta}\right)\left\{\sum_{j=0}^{J}\frac{1}{j!}\left[\sum_{i=0}^{K}\frac{\Delta^i}{i!}A_Y^i\circ H_j\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\bigg|_{y=y_0}\right]H_j\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\}.$$

앞에서 설명한대로 X_t의 근사적 전이확률밀도 함수는 변수변환을 통해 어렵지 않게 얻을 수 있다.

3.2. Kolmogorov 편미분방정식 방법

Egorov *et al.* (2003)이 위와 같은 결과를 구했지만 Aït-Sahalia (2002)에서와 같이 Kolmogorov 편미분 방정식을 이용한 다른 형태의 근사적 전이확률밀도 함수를 구하지는 않았다. 이 결과는 Choi (2013)가 아래와 같이 구했다.

$$\begin{aligned} &p_Y^{(K)}(t,y|t_0,y_0;\theta) \\ &= \Delta^{-\frac{1}{2}}\phi\left(\frac{y-y_0}{\Delta}\right)\exp\left(\int_{y_0}^{y}\mu_Y(t,\omega;\theta)\,d\omega\right)\sum_{k=0}^{K}c_Y^{(k)}(t,y|t_0,y_0;\theta)\frac{\Delta^k}{k!}, \end{aligned} \tag{14}$$

여기에서 $c_Y^{(0)}(t,y|t_0,y_0;\theta) = 1$이고 모든 $k \geq 1$에 대해

$$
\begin{aligned}
&c_Y^{(k)}(t,y|t_0,y_0;\theta) \\
&= k\int_0^1 u^{k-1}\left\{\lambda_Y(y_0+u(y-y_0),t,y_0;\theta)\,c_Y^{(k-1)}(t,y_0+u(y-y_0)|t_0,y_0;\theta)\right. \\
&\left. +\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 c_Y^{(k-1)}(t,\omega|t_0,y_0;\theta)}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=y_0+u(y-y_0)} - \frac{\partial c_Y^{(k-1)}(t,y_0+u(y-y_0)|t_0,y_0;\theta)}{\partial t}\right\}du
\end{aligned}
$$

이며 $\lambda_Y(t,y,y_0;\theta) = -\frac{1}{2}\left[\mu_Y(t,y;\theta)^2 + \frac{\partial\mu_Y(t,y;\theta)}{\partial y}\right] - \int_{y_0}^{y}\frac{\partial\mu_Y(t,\omega;\theta)}{\partial t}d\omega$. 앞에서와 마찬가지로 근사식 (14)을 시간-비균질 확산과정 Y_t의 전이확률밀도 함수가 Kolmogorov 전진 편미분방정식

$$
\frac{\partial p_Y(t,y\mid t_0,y_0;\theta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\{\mu(t,y;\theta)\,p_Y(t,y\mid t_0,y_0,\theta)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_Y(t,y\mid t_0,y_0,\theta)
$$

과 후진 편미분방정식

$$
-\frac{\partial p_Y(t,y\mid t_0,y_0;\theta)}{\partial t_0} = \mu(t_0,y_0;\theta)\frac{\partial p_Y(t,y\mid t_0,y_0;\theta)}{\partial y_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_Y(t,y\mid t_0,y_0;\theta)}{\partial y_0^2}.
$$

을 만족한다는 사실을 이용해 식 (14)의 계수$c_Y^{(k)}(t,y|t_0,y_0;\theta)$의 연쇄식을 위와 같이 구할 수 있다.

2장과 3장에서 살펴본 바와 같이 단일변수 시간-균질 확산과정과 시간-비균질 확산과정의 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방법은 매우 비슷하다. 큰 차이점은 시간-비균질의 경우 추세 함수나 변동성 함수가 시간 변수 t 에도 의존하기 때문에 허마잇 급수 전개식의 계수를 계산하기 위해 조건부 기대값을 근사시킬 때 필요한 무한소 작용소에 시간 변수에 대한 미분이 추가된 다는 것이다. 같은 이유로 Kolmogorov 편미분 방정식 방법을 활용할 때는 근사적 전이확률밀도 함수의 계수가 시간 변수에도 의존하게 된다는 것 또한 차이점이다. 그런데 아래에서 설명하지만 다변수 확산과정 모형의 경우에는 이보다 더 근본적이고 해결이 어려운 차이점이 발생한다. 시간-균질 모형의 결과는 비교적 많이 실증분석에 활용된 편이지만 시간-비균질 모형은 그렇지 않다. 그 이유는 먼저 시간-비균질 확산과정 모형을 실증 분석에 이용할 때 어떤 추세 함수나 변동성 함수를 사용할지 결정해야 한다. 그런데 시간-균질 모형을 이용한 실증 분석은 다양한 방법들을 이용해 활발하게 이루어졌기 때문에 이들이 사용한 모형을 활용할 수 있지만 시간-비균질 모형을 그렇지 않아 연구자가 데이터에 적절한 모형을 잘 결정해야 한다.

더 어려운 문제는, 시간-비균질 모형을 최우추정법으로 추정한 후에 통계적 추론을 시행하기 위해서는 추정량의 분포를 알아야 하는데 이 모형의 시간에 대한 의존성 때문에 일반적으로 이를 구하는 것이 쉽지 않다는 것이다.

4. 다변수 시간-균질 확산과정의 근사적 (로그)-전이확률밀도 함수

다변수 시간-균질 확산과정 모형은 확산과정 X_t가 m 차원의 벡터로

$$dX_t = \mu(X_t;\theta)\,dt + \sigma(X_t;\theta)\,dW_t \tag{15}$$

에서 $\mu(X_t;\theta) = (\mu_1(X_t;\theta), \mu_2(X_t;\theta), ..., \mu_m(X_t;\theta))^T$이고 $\sigma(X_t;\theta) = [\sigma_{\iota j}(X_t;\theta)]$,
$i,j = 1,...,m$으로 $m \times m$ 행렬이며 W_t는 m 차원의 표준 브라운 운동 벡터다. 이러한 X_t의 근사적 전이확률밀도 함수를 구하기 위한 대략적인 조건은 추세 함수, $\mu_i(X_t;\theta)$, $i = 1,...,m$와 변동성 함수, $\sigma_{\iota j}(X_t;\theta)$, $i,j = 1,...,m$가 무한 번 미분 가능하다는 것이다. 다변수 확률 미분 방정식 (15)의 해가 유일하게 존재하기 위한 조건 등 다른 엄밀한 가정들은 Aït-Sahalia(2008)에 있다. 추세 함수나 변동성 함수들 중 어느 하나라도 시간 변수 t에 의존하는 함수면 이 모형은 시간-비균질 확산과정이 된다.

다변수 확산과정의 역사도 길다 (Brennan and Schwartz, 1979, Langetieg, 1980, 그리고 Stambaugh, 1988). 최근에는 더 많은 다변수 확산과정 모형들이 연구에 이용되고 있다. 구체적인 예들을 몇 가지 보면 먼저 Duffie and Kan (1996)과 Dai and Singleton (2000)은 어파인 (affine) 모형을 이용했다. 어파인 확산과정 모형은

$$dX_t = K(A - X_t)\,dt + \sqrt{S(X_t;\beta)}\,dW_t,$$

과 같은 형태로 여기에서 $S(X_t;\beta)$는 대각 행렬 (diagonal matrix)이고 그 대각 원소가 $S_{ii} = 1 + X_t'\beta_i$과 같이 표현되는 경우다. 분산의 상수 탄력성 (constant elasticity of variance: CEV) 모형,

$$d\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (r-d)X_{1t} \\ k(\gamma - X_{2t}) \end{bmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)X_{2t}}X_{1t} & \rho\sqrt{X_{2t}}X_{1t} \\ 0 & \sigma X_{2t}^{\beta} \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \end{pmatrix}$$

은 Lewis (2000)와 Jones (2003a)에서 활용됐다. 이 모형에서 $\beta = 1/2$이면 헤스톤(Heston) 모형이 (Heston, 1993)되고 $\beta = 1$이면 가치 확률 변동성 (GARCH

Stochastic Volatility) 모형이 되어 (Nelson, 1990, 그리고 Meddahi, 2001) 이들 모형은 CEV모형에 포함된다.

X_t를 변환해 변동성 행렬을 단위 행렬 (identity matrix)로 바꿀 수 있느냐 없느냐에 따라 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방법이 다르다. 위에서 본 바와 같이 단일변수 확산과정 모형은 램퍼티 변환을 이용해 항상 변동성 함수를 1로 바꿀 수 있다. 다변수 확산과정 모형은 그렇지 않다. Aït-Sahalia (2008)는 다변수 시간-균질 확산과정을 변환해 변동성 행렬을 단위 행렬 (identity matrix)로 바꿀 수 있는 경우를 축소 가능(reducible)이라 하고 그렇지 않은 경우를 축소 가능하지않다 (irreducible)고 정의하고 각각의 경우에 근사적 전이확률밀도 함수와 로그-전이확률밀도 함수를 구하는 방법과 이론을 개발했다.

Definition 1. *확산과정 X_t,*

$$dX_t = \mu\left(X_t;\theta\right)dt + \sigma\left(X_t;\theta\right)dW_t$$

가 단위 확산과정 (unitdiffusion)으로 축소가능 (reducible)하다는 것은 확산과정 X_t를 확산과정 Y_t로 변환할 수 있는 1대1 변환이 존재해 Y_t의 변동성 행렬이 단위행렬이 되는 경우다. 다시 말해 x에 대해 무한 번 미분 가능하고 역변환이 존재하는 변환 $\gamma(x;\theta)$가 존재해 $Y_t \equiv \gamma(X_t;\theta)$가 확률 미분 방정식

$$dY_t = \mu_Y\left(Y_t;\theta\right)dt + dW_t$$

를 만족한다는 것이다. 여기에서 변동성 함수 벡터 $\mu_Y\left(Y_t;\theta\right)$의 i번 째 원소는

$$\begin{aligned}\mu_{Y_i}\left(y;\theta\right) &= \sum_{p=1}^{m}\mu_p\left(\gamma^{inv}\left(y;\theta\right);\theta\right)\left.\frac{\partial\gamma_i\left(y;\theta\right)}{\partial x_p}\right|_{x=\gamma^{inv}(y;\theta)} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sigma_{pr}\left(\gamma^{inv}\left(y;\theta\right);\theta\right)\sigma_{qr}\left(\gamma^{inv}\left(y;\theta\right);\theta\right)\left.\frac{\partial^2\gamma_i\left(x;\theta\right)}{\partial x_p\partial x_q}\right|_{x=\gamma^{inv}(y;\theta)}\end{aligned}$$

이고

$$\nabla\gamma(x;\theta) = \sigma^{-1}\left(x;\theta\right)$$

로 Ito 보조정리를 이용해 구할 수 있다.□

위 정의에서 $\nabla\gamma(x;\theta)$는 $\gamma(x;\theta) = \left[\gamma_1\left(x;\theta\right),\gamma_2\left(x;\theta\right),\cdots,\gamma_m\left(x;\theta\right)\right]^T$를 $x \in R^m$에 대해서 미분한 야코비의 행렬이다, 즉 $\nabla\gamma(x;\theta) = \left[\partial\gamma_i\left(x;\theta\right)/\partial x_j\right]_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,m}$. 단일변수 확산과정은 램퍼티 변환을 이용해 항상 단위 확산과정으로 변환할 수 있어 축소가능하다. 그러나 다변수 확산과정은 항상 축소가능한 것은 아니다. Aït-Sahalia (2008)는 어떤 확산과정의 축소 가능 여부를 알 수 있는 필요충분 조건을 증명했다.

Proposition 1. *(축소 가능성 여부를 결정하는 필요충분 조건) 확산과정 X_t가 축소가능 (reducible)하다는 것의 필요충분 조건은*

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{-1}(x;\theta)}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}^{-1}(x;\theta)}{\partial x_j} \tag{16}$$

이다. 여기에서 하첨자 i,j,k는 $k > j$를 만족하는 $\{i,j,k\} \subset \{1,2,\cdots,m\}$이고 x_k는 m차원 벡터 x의 k번째 원소다. 그리고 $\sigma_{ij}^{-1}(x;\theta)$는 $\sigma(x;\theta)$의 역행렬의 (i,j) 원소다.□

이 명제로부터 확산과정 (15)이 축소 가능하면 변환 $\gamma(x;\theta)$가 존재하고 $\nabla\gamma(x;\theta)\,\sigma(x;\theta) = I_m$ 즉 $\nabla\gamma(x;\theta) = \sigma^{-1}(x;\theta)$임을 알 수 있다. 축소 가능성과 필요충분인 조건은 제약적인 편이기 때문에 많은 다변수 확산과정이 축소 가능하지 않으리라 예상할 수 있다. 그렇기 때문에 축소 가능하지 않은 확산과정의 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방법은 당연히 축소 가능한 확산과정에 적용될 수 있지만 반대의 경우는 아니다. 확산과정이 m차원이면 축소 가능성 확인을 위해 모두 $m^2(m-1)/2$개의 등식이 성립하는지 확인해야 한다. 예를 들면, $m = 2$이면 다음의 두 개의 등식만 확인하면 된다:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{-1}(x;\theta)}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{12}^{-1}(x;\theta)}{\partial x_1} \text{ 그리고 } \frac{\partial \sigma_{22}^{-1}(x;\theta)}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{21}^{-1}(x;\theta)}{\partial x_2}$$

좀 더 구체적인 예를 보면

$$\sigma(x;\theta) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_2;\theta) & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(x_2;\theta) \end{pmatrix}$$

이면 이 확산과정은 축소 가능하지 않다. 그런데

$$\sigma(x;\theta) = \begin{pmatrix} a(x_1;\theta) & a(x_1;\theta)\,b(x_2;\theta) \\ 0 & c(x_2;\theta) \end{pmatrix}$$

이면

$$\sigma^{-1}(x;\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(x_1;\theta)} & -\frac{b(x_2;\theta)}{c(x_2;\theta)} \\ 0 & \frac{1}{c(x_2;\theta)} \end{pmatrix}.$$

이므로 이 확산과정은 축소 가능하다.

4.1.1 허마잇 급수 전개 방법

확산과정 (15)가 축소 가능한 경우엔 단일변수 모형과 같이 허마잇 급수 전개식으로 전이확률밀도 함수를 근사시킬 수 있다. 차이점은 다변수 모형이므로 다변수 전이확률밀도 함수를 다변수 정규분포의 확률밀도 함수 주변으로 다변수 허마잇 다항식을 이용한 급수 전개를 하는 것이다. m차원 표준 정규분포의 확률밀도 함수를 $\phi(z)$라 하면 m차원 허마잇 다항식은

$$H_h(z) = \frac{(-1)^{|h|}}{\phi(z)} \frac{\partial^{|h|}\phi(z)}{\partial z_1^{h_1} \cdots \partial z_m^{h_m}}$$

이며 여기에서 $|h| = \sum_{i=1}^m h_i$이다. 다변수 허마잇 다항식도 다음과 같은 직교성을 갖는다:

$$\int_{R^m} H_h(z) H_k(z) \phi(z)\, dx = \begin{cases} h_1! \cdots h_m! & \text{만일 } h = k \\ 0 & \text{다른 경우들은} \end{cases}.$$

그러면 시간-균질 확산과정 Y_t의 J차 허마잇 급수 전개식은

$$p_Y^{(J)}(\Delta, y \mid y_0; \theta) = \Delta^{-m/2} \phi\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \sum_{h \in N^m : |h| \le J} \eta_h(\Delta, y_0; \theta) H_h\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

이다. 허마잇 다항식의 직교성을 이용하면 허마잇 급수식의 계수는

$$\eta_h(\Delta, y_0) = \frac{1}{h_1! \cdots h_m!} E\left[H_h\left(\frac{Y_t - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \middle| Y_{t_0} = y_0 \right]$$

이다. 계수 $\eta_h(\Delta, y_0)$를 확산과정 Y_t의 무한소 작용소 A_Y, 즉

$$A_Y \circ f(\Delta, y, y_0) = \sum_{i=1}^m \mu_{Y_i}(y; \theta) \frac{\partial f(\Delta, y, y_0)}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(\Delta, y, y_0)}{\partial y_i \partial y_j}$$

를 이용해 K차 까지 급수 전개를 하면 다음과 같이 허마잇 급수 전개식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & p_Y^{(J,K)}(\Delta, y \mid y_0; \theta) \qquad (17) \\ & = \Delta^{-m/2} \phi\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \\ & \times \left\{ \sum_{h \in N^m : |h| \le J} \frac{1}{h_1! \cdots h_m!} \left[\sum_{i=0}^K \frac{\Delta^i}{i!} A_Y^i \circ H_h\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \bigg|_{y = y_0} \right] H_h\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \right\}. \end{aligned}$$

4.1.2 Kolmogorov 편미분방정식 방법

단일변수의 경우와 마찬가지로 근사식 (17)을 Δ의 오름차순으로 다시 재배열하면[13] 다른 형태의 근사적 전이확률밀도 함수를 구할 수 있다.

Theorem 3. *급수 전개식 (17)에서 $J=\infty$일 때 모든 항들을 Δ의 오름차순으로 다시 배열해 정리하면*

$$\begin{aligned} & p_Y^{(K)}(\Delta, y|y_0;\theta) \qquad (18) \\ &= \Delta^{-m/2}\phi\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\exp\left[\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{0i})\int_0^1 \mu_{Y_i}(y_0+u(y-y_0);\theta)\,du\right] \\ &\times \sum_{k=0}^{K} c_Y^{(k)}(\Delta, y|y_0;\theta)\frac{\Delta^k}{k!} \end{aligned}$$

를 얻는다. 여기에서 $\phi(\cdot)$는 m차 표준 정규분포의 확률밀도함수다. 첫 째 계수 $c_Y^{(0)}(y|y_0)=1$이고 $k\geq 1$의 계수들 $c_Y^{(k)}(y|y_0)$는 다음 식을 이용해 순차적으로 계산할 수 있다.

$$c_Y^{(k)}(y|y_0) = k\int_0^1 g^{(k)}(y_0+u(y-y_0)|y_0)\,u^{k-1}du, \text{ 여기에서,}$$

[13]다변수 확산과정에서 실제로 어떠한 결과를 얻는지 구체적인 식으로 찾은 논문은 최근의 Wan and Yang (2019)이다. 이들은 축소가능하지 않은 확산과정에 대해 변동성 행렬에 조건부 변수 값을 대입한 것의 1/2제곱을 이용한 선형 변환으로 원래 확산과정을 변환한 후 허마잇 급수 전개법을 적용했다.

$$
\begin{aligned}
& g^{(k)}(\omega|y_0) \\
= \quad & \left\{ -\sum_{i=1}^{m} \mu_{Y_i}(\omega) \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\sum_{i=1}^{m} (\omega_i - y_{0i}) \int_0^1 \mu_{Y_i}(y_0 + u(\omega - y_0))\, du \right) du \right. \\
& - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mu_{Y_i}(\omega)}{\partial \omega_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\sum_{i=1}^{m} (\omega_i - y_{0i}) \int_0^1 \mu_{Y_i}(y_0 + u(\omega - y_0))\, du \right) \right]^2 \\
& \left. + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega_i^2} \left(\sum_{i=1}^{m} (\omega_i - y_{0i}) \int_0^1 \mu_{Y_i}(y_0 + u(\omega - y_0))\, du \right) \right\} c_Y^{(k-1)}(\omega|y_0) \\
& + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\sum_{i=1}^{m} (\omega_i - y_{0i}) \int_0^1 \mu_{Y_i}(y_0 + u(\omega - y_0))\, du \right) \frac{\partial c_Y^{(k-1)}(\omega|y_0)}{\partial \omega_i} \\
& - \sum_{i=1}^{m} \mu_{Y_i}(\omega) \frac{\partial c_Y^{(k-1)}(\omega|y_0)}{\partial \omega_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_Y^{(k-1)}(\omega|y_0)}{\partial \omega_i^2}.
\end{aligned}
$$

□

위 정리는 Choi (2015)가 다변수 확산과정 Y_t의 전이확률밀도 함수가 Kolmogorov 전진 편미분방정식

$$
\frac{\partial p_Y(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \{\mu_{Y_i}(t, y)\, p_Y(t, y \mid t_0, y_0)\}}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 p_Y(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i^2}
$$

과 후진편미분방정식

$$
-\frac{\partial p_Y(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial t_0} = \sum_{i=1}^{m} \mu_{Y_i}(t_0, y_0) \frac{\partial p_Y(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_{0i}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 p_Y(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_{0i}^2}
$$

를 만족한다는 사실을 이용해 증명했다. 또한 식 (18)은 다변수 점프 확산과정의 전이확률밀도 함수의 근사식을 구할 때 매우 유용하게 활용된다.

식 (18)에 로그를 취하고 Δ에 대해 0 주변으로 테일러 급수 전개를 하면 다음 정리에서 볼 수 있는 것과 같은 형태의 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 얻는다. 그런데 아래에 정리된 결과는 식 (18)를 직접 테일러 급수 전개해 얻은 것이 아니라, 근사적 전이확률밀도 함수를 구한 방법과 같이 로그-전이확률밀도가 함수 Kolmogorov 전진 편미분방정식

$$\frac{\partial l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial\Delta} = -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mu_{Y_i}(y;\theta)}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(t,y)\frac{\partial l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial y_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial y_i}\right]^2 \tag{19}$$

과 후진 편미분방정식

$$\frac{\partial l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial\Delta} = \sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(y_0;\theta)\frac{\partial l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial y_{0i}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial y_{0i}^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial l_Y(\Delta,y|y_0;\theta)}{\partial y_{0i}}\right]^2. \tag{20}$$

을 만족한다는 사실을 이용한다. 로그-전이확률밀도 함수 식 (21)을 전진 방정식에 대입해 Δ의 차수가 같은 항들끼리 비교하면 식 (21)의 계수들이 만족하는 편미분 방정식을 얻는데, 식 (21)이 후진 방정식도 만족한다는 사실을 이용하면 정리에서와 같이 편미분 방정식을 풀어낼 수 있다.

Theorem 4. *다변수 시간-균질 단위 확산과정 Y_t의 K차 근사적 로그-전이확률 밀도 함수는 다음과 같다:*

$$l_Y^{(K)}(\Delta,y|y_0;\theta) = -\frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta) + \frac{C_Y^{(-1)}(\Delta,y|y_0;\theta)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{K}C_Y^{(k)}(\Delta,y|y_0;\theta)\frac{\Delta^k}{k!} \tag{21}$$

여기에서

$$C_Y^{(-1)}(\Delta,y|y_0;\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{0i})^2 \tag{22}$$

$$C_Y^{(0)}(\Delta,y|y_0;\theta) = \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{0i})\int_0^1\mu_{Y_i}(y_0+u(y-y_0);\theta)\,du \tag{23}$$

이고 모든 $k\geq 1$인 경우는

$$C_Y^{(k)}(\Delta,y|y_0;\theta) = k\int_0^1 G_Y^{(k)}(\Delta,y_0+u(y-y_0)\mid y_0;\theta)\,u^{k-1}du \tag{24}$$

이며

$$G_Y^{(1)}(\Delta, y|y_0;\theta) = -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mu_{Y_i}(y;\theta)}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(y;\theta)\frac{\partial C_Y^{(0)}(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial^2 C_Y^{(0)}(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial y_i^2} + \left[\frac{\partial C_Y^{(0)}(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial y_i}\right]^2\right\} \tag{25}$$

이고 $k \geq 2$ *일 때는*

$$G_Y^{(k)}(\Delta, y|y_0;\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 C_Y^{(k-1)}(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial y_i^2} - \sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(t, y)\frac{\partial C_Y^{(k-1)}(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=0}^{k-1}\binom{k-1}{h}\frac{\partial C_Y^{(h)}(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial y_i}\frac{\partial C_Y^{(k-1-h)}(\Delta, y|y_0;\theta)}{\partial y_i} \tag{26}$$

이다.□

이 결과를 이용하면 근사식 (21)의 계수들을 $k = 0$ 부터 연쇄적으로 원하는 차수까지 계산할 수 있다[14]. 그리고 여기에서 얻은 로그-전이확률밀도의 근사식은 축소 가능하지않은 (irreducible) 확산과정의 로그-전이확률밀도 함수를 구할 때 그리고 Aït-Sahalia (2008)의 결과들을 시간-비균질 모형들로 확장할 때 매우 유용하게 활용된다.

물론 근사식 (18)을 직접 Δ에 대해 0 주변으로 테일러 급수 전개를 할 수도 있는데, 이 경우 얻어지는 Δ의 각 차수의 계수들은 식 (18)의 계수들로 표현이 되어 식 (21)의 계수들과의 관계를 알 수 있다. 이 결과는 Choi (2015)에 정리되어 있고 특히 시간-비균질 점프 확산과정의 근사식을 구할 때 매우 쓸모가 있다.

원래의 확산과정 X_t의 로그-전이확률밀도 함수 $l_X(\Delta, x|x_0;\theta)$는 Y_t의 로그-전이확률밀도 함수 $l_Y(\Delta, y|y_0;\theta)$를 변수 변환해 찾을 수 있다:

[14]이러한 계산에서도 손으로하기에는 복잡한 미분과 적분 계산들을 해야하기 때문에 Maple 이나 Mathematica와 같은 프로그램을 사용하는 것이 좋다.

$$\begin{aligned} l_X(\Delta, x|x_0;\theta) &= \ln(Det[\nabla\gamma(x;\theta)]) + l_Y(\Delta, \gamma(x;\theta) \mid \gamma(x_0;\theta);\theta) \\ &= -D_\upsilon(x;\theta) + l_Y(\Delta, \gamma(x;\theta) \mid \gamma(x_0;\theta);\theta). \end{aligned}$$

두 번째 등식은 $Det[\nabla\gamma(x;\theta)] = Det\left[\sigma^{-1}(x;\theta)\right] = Det[\upsilon(x;\theta)]^{-1/2}$ 이기 때문이고 여기에서 $\upsilon(x;\theta) = \sigma(x;\theta)\sigma(x;\theta)^T$ 이고 $D_\upsilon(x;\theta) \equiv \frac{1}{2}\ln(Det[\upsilon(x;\theta)])$ 이다. 그러므로 l_Y를 $l_Y^{(K)}$로 바꾸면 K차 근사적 로그-전이확률밀도 함수는

$$\begin{aligned} l_X^{(K)}(\Delta, x|x_0;\theta) &= -D_\upsilon(x;\theta) + l_Y^{(K)}(\Delta, \gamma(x;\theta) \mid \gamma(x_0;\theta);\theta) \qquad (27) \\ &= -D_\upsilon(x;\theta) - \frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta) + \frac{C_Y^{(-1)}(\Delta, \gamma(x;\theta) \mid \gamma(x_0;\theta);\theta)}{\Delta} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{K} C_Y^{(k)}(\Delta, \gamma(x;\theta) \mid \gamma(x_0;\theta);\theta)\frac{\Delta^k}{k!} \end{aligned}$$

이다.

만일 모든 $i = 1, \cdots, m$에 대해 $\mu_i(x;\theta) = \mu_i(x_i;\theta)$이고 $\sigma_{ii}(x;\theta) = \sigma_{ii}(x_i;\theta)$이며 $i \neq j$일 때 $\sigma_{ij}(x_i;\theta) = 0$이면 다변수확산과정 X_t의 전이확률밀도 함수는 각 변수의 전이확률밀도 함수들의 곱이다. 그리고 이 경우가 축소 가능한 것은 뚜렷하므로 X_t의 근사적 로그-전이확률밀도 함수는

$$l_X^{(K)}(\Delta, x|x_0;\theta) = \sum_{i=1}^{m} l_{X_i}^{(K)}(\Delta, x_i|x_{0i};\theta)$$

로 표현되는데 여기에서 $l_{X_i}^{(K)}(\Delta, x_i|x_{0i};\theta)$는 i번 째 변수의 근사적 로그-전이확률밀도 함수다.

4.2. 축소 가능하지 않은 확산과정 (Irreducible Diffusion)

위에서 본 어떤 확산 과정이 축소 가능하기(reducible) 위한 필요충분 조건은 꽤 제약적인 편으로 일반적으로는 확산과정이 축소 가능하지 않다 (irreducible). 그렇다면 축소 가능하지 않은 확산과정은 단위 확산과정으로 변환할 수 없기 때문에 축소 가능한 경우에 적용한 허마잇 급수 전개 방법이나 Kolmogorov 편미분방정식 방법[15]을 이용할 수 없다. 그래서 Aït-Sahalia(2008)가

[15]이 두 가지 모두를 축소 가능 방법 (reducible method)이라 그리고 이제 소개할 축소 가능하지 않은 확산과정에 대한 새로운 방법을 축소 가능하지 않은 방법(irreducible method)이라 부르자.

생각해낸 방법은 먼저 축소가능한 경우에 구한 로그-전이확률밀도 함수의 형태를 그대로 이용하는 것이다. 즉, 축소 가능하지 않은 확산 과정의 로그-전이확률밀도 함수를

$$\begin{aligned} & l_X^{(K)}(\Delta, x|x_0;\theta) \\ = \quad & -\frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta) - D_\upsilon(x;\theta) + \frac{C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0;\theta)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{K} C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0;\theta)\frac{\Delta^k}{k!} \end{aligned} \tag{28}$$

라 하고 이를 X_t의 Kolmogorov 전진 편미분방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_X(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial \Delta} = & -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mu_i(x;\theta)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 \upsilon_{ij}(x;\theta)}{\partial x_i \partial x_j} \\ & -\sum_{i=1}^{m}\mu_i(t,x)\frac{\partial l_X(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_i} \\ & +\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \upsilon_{ij}(x;\theta)}{\partial x_i}\frac{\partial l_X(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_j} \\ & +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\upsilon_{ij}(x;\theta)\frac{\partial^2 l_X(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_i \partial x_j} \\ & +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial l_X(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_i}\upsilon_{ij}(x;\theta)\frac{\partial l_X(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{29}$$

에 대입해 같은 차수의 Δ항들을 비교하면 다음 정리에서와 같이 식 (28)의 계수들이 만족하는 편미분 방정식들을 얻는다.

Theorem 5. *다변수 시간-균질 확산과정 X_t의 근사적 로그-전이확률밀도 함수 (28)의 계수들 $C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0;\theta)$은 다음의 편미분 방정식들을 만족한다.*

$$f_X^{(k-1)}(\Delta, x|x_0;\theta) = 0$$

여기에서 k는 $-1, 0, \cdots, K$의 값들인데

$$\begin{aligned} & f_X^{(-2)}(\Delta, x|x_0;\theta) \\ & = -2C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0;\theta) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\upsilon_{ij}(x;\theta)\frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_i}\frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_j}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
& f_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0;\theta) \\
& = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x|x_0;\theta)}{\partial x_j} - G_X^{(0)}(\Delta, x|x_0;\theta),
\end{aligned} \tag{31}
$$

이고 모든 $k \geq 1$에 대해서는

$$
\begin{aligned}
f_X^{(k-1)}(\Delta, x|x_0;\theta) \;=\;& C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0;\theta) \\
& -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x \mid x_0;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k)}(\Delta, x \mid x_0;\theta)}{\partial x_j} \\
& -G_X^{(k)}(\Delta, x \mid x_0;\theta).
\end{aligned} \tag{32}
$$

이다. 그리고 $G_X^{(k)}(\Delta, x \mid x_0;\theta)$는 $k = 0$이고 1일 때 각각

$$
\begin{aligned}
G_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0;\theta) \;=\;& \frac{m}{2} - \sum_{i=1}^{m} \mu_i(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x \mid x_0;\theta)}{\partial x_i} \\
& +\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \upsilon_{ij}(x;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x \mid x_0;\theta)}{\partial x_j} \\
& -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x \mid x_0;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_j} \\
& +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial^2 C_X^{(-1)}(\Delta, x \mid x_0;\theta)}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& G_X^{(1)}(\Delta, x \mid x_0; \theta) \\
= \; & -\sum_{i=1}^{m} \mu_i(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \upsilon_{ij}(x;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_j} \\
& -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mu_i(x;\theta)}{\partial x_i} \\
& +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial^2 C_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \upsilon_{ij}(x;\theta)}{\partial x_i \partial x_j} \\
& +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_j} \\
& +\sum_{i=1}^{m} \mu_i(x;\theta) \frac{\partial D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \upsilon_{ij}(x;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_j} \\
& -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \left[\frac{\partial^2 D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_j} \right]
\end{aligned}
$$

이며 $k \geq 2$ *일 때는*

$$
\begin{aligned}
& G_X^{(k)}(\Delta, x \mid x_0; \theta) \\
& = -\sum_{i=1}^{m} \mu_i(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \upsilon_{ij}(x;\theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_j} \\
& -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(x;\theta)}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial^2 C_X^{(k-1)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(x;\theta) \left[\sum_{h=1}^{k-2} \binom{k-1}{h} \frac{\partial C_X^{(h)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1-h)}(\Delta, x \mid x_0; \theta)}{\partial x_j} \right]
\end{aligned}
$$

이다.□

만약에 확산과정 X_t가 축소 가능하면 위의 편미분 방정식들은 구체적인 식으로 풀 수 있지만 (Choi, 2015) X_t는 축소 가능하지 않기 때문에 그렇게 할 수 없다. 그래서 Aït-Sahalia (2008)는 위 편미분 방정식들에 있는 모든 x의 함수들, 다시 말해 계수들 $C_X^{(k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$뿐만 아니라 추세 함수와 변동성 함수들까지 모두를 조건부 변수의 값 x_0 주변으로 테일러 급수 전개를 하고 각 항들의 계수를 비교해 구한 $C_X^{(k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$의 테일러 급수를 이용할 것을 제안했다. 각 계수 $C_X^{(k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$를 j_k차 까지 테일러 급수로 구한 것을 $C_X^{(k,j_k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$라 나타내고 이를 식 (28)에서 $C_X^{(k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$대신 쓰면

$$\begin{aligned}\widetilde{l}_X^{(K)}(\Delta,x|x_0;\theta) &= -\frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta) - D_\upsilon(x;\theta)\\ &\quad + \frac{C_X^{(j_{-1},-1)}(\Delta,x|x_0;\theta)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{K} C_X^{(j_k,k)}(\Delta,x|x_0;\theta)\frac{\Delta^k}{k!}\end{aligned}$$

와 같이 축소 가능하지 않은 시간-균질 확산과정의 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 얻게된다.

각 계수의 테일러 급수의 오차와 근사식 (28)의 오차 $O_p(\Delta^{K+1})$가 같도록 차수 j_k는 $j_k = 2(K-k+1)$에 따라 정하면 된다. 예를 들어 $K=2$이면, $j_{-1}=8,\ j_0=6,\ j_1=4,\ j_2=2,\ j_3=0$로 $C_X^{(j_3,3)}(\Delta,x|x_0;\theta)$의 상수항까지만 계산하면 된다. 그리고 (28)의 계수 $C_X^{(k,j_k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$를 구할 때는 앞에서와 마찬가지로 $k=-1$부터 순서대로 계산해야 한다 왜냐하면 각 $C_X^{(k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$의 편미분 방정식은 k보다 작은 계수들을 포함하기 때문이다. 또한 각 테일러 급수 $C_X^{(k,j_k)}(\Delta,x|x_0;\theta)$를 찾을 때 높은 차수 항의 계수는 보통 낮은 차수 항의 계수에 의존하기 때문에 낮은 차수 먼저 순서대로 찾아야한다. 이렇게 구한 결과는 이중 급수 전개식으로 사실 허마잇 급수 전개식과 같다. 그러므로 Bakshi *et al.* (2006)의 결과는 위 아이디어를 단일 변수 모형에 적용한 것이다.

5. 다변수 시간-비균질 확산과정의 근사적 (로그)-전이확률밀도 함수

다변수 시간-균질 확산과정 (15)에서 추세 함수나 변동성 함수가 X_t뿐만 아니라 시간 변수 t의 함수인 경우, 즉

$$dX_t = \mu(t,X_t;\theta)\,dt + \sigma(t,X_t;\theta)\,dW_t \tag{33}$$

이면 다변수 시간-비균질 확산과정이다. 시간-균질의 경우에서와 같이 이 모형이 축소 가능하냐 아니냐에 따라 다른 방식으로 근사적 전이확률밀도 함수나

로그-전이확률밀도 함수를 구할 수 있다. 시간-비균질 확산과정의 축소 가능성 (reducibility)도 시간-균질의 경우와 비슷하게 정의한다.

Definition 2. *확산과정* X_t,

$$dX_t = \mu\left(t, X_t; \theta\right) dt + \sigma\left(t, X_t; \theta\right) dW_t$$

가 단위 확산과정 (unit diffusion)으로 축소가능 (reducible)하다는 것은 확산과정 X_t*를 단위 확산과정* Y_t*로 변환할 수 있는 1대1 변환이 존재해* Y_t*의 변동성 행렬이 단위행렬이 되는 경우다. 다시 말해* t *와* x*에 대해 무한 번 미분 가능하고 역변환이 존재하는 변환* $\gamma(t,x;\theta)$*가 존재해* $Y_t \equiv \gamma(t, X_t)$*가 확률 미분 방정식*

$$dY_t = \mu_Y\left(t, Y_t\right) dt + dW_t$$

를 만족한다는 것이다. 여기에서 변동성 함수 벡터 $\mu_Y\left(Y_t; \theta\right)$*의* i *번 째 원소는*

$$\begin{aligned}\mu_{Y_i}\left(t,y\right) \quad = \quad & \frac{\partial \gamma_i\left(t, \gamma^{inv}\left(t,y\right)\right)}{\partial t} + \sum_{p=1}^{m} \mu_p\left(t, \gamma^{inv}\left(t,y\right)\right) \left.\frac{\partial \gamma_i\left(t,x\right)}{\partial x_p}\right|_{x=\gamma^{inv}(t,y)} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \sigma_{pr}\left(t, \gamma^{inv}\left(t,y\right)\right) \sigma_{qr}\left(t, \gamma^{inv}\left(t,y\right)\right) \left.\frac{\partial^2 \gamma_i\left(t,x\right)}{\partial x_p \partial x_q}\right|_{x=\gamma^{inv}(t,y)}\end{aligned}$$

이고

$$\nabla \gamma(t,x) = \sigma^{-1}\left(t,x\right) \tag{34}$$

로 Ito 보조정리를 이용해 구할 수 있다.□

시간-비균질 확산과정의 축소 가능성은 시간-균질의 경우와 같이 변동성 함수의 x변수만 관련이 있으므로 명제 4를 이용해 축소가능 여부를 알 수 있다. 다변수시간-비균질 확산과정이 축소 가능하면 시간-균질에서와 같이 축소 가능 방법을 이용할 수 있다. 그렇지만, 축소 가능하지 않으면 축소 가능하지 않은 방법을 적용해 각 계수의 테일러 급수의 계수를 구해야 하는데 이 때 무한히 많은 계수들을 구하지 못해 연쇄적으로 계수들을 구하는 것이 더 이상 가능하지 않게 되는 문제가 생기는데 Choi (2013)가 이를 해결했다.

5.1. 축소 가능한 확산과정 (Reducible Diffusion)

5.1.1 허마잇 급수 방법

축소 가능한 경우에는 허마잇 급수 방법이나 Kolmogorov 편미분 방정식 방법을 시간-균질에서와 마찬가지로 적용해 근사적 전이확률밀도 함수나 로그-전이확률밀도 함수를 구할 수 있다. 먼저 허마잇 급수 전개식을 구할 때는 전이확률밀도 함수를 다변수 표준 정규분포의 확률밀도 함수 주위로 다변수 허마잇 다항식을 이용해 구하는 것은 똑같지만, 허마잇 급수 전개의 계수

$$\eta_h(t,t_0,y_0) = \frac{1}{h_1!\cdots h_m!}E\left[H_h\left(\frac{Y_t-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\middle| Y_{t_0}=y_0\right]$$

를 근사시킬 때 시간-비균질 확산과정 Y_t의 무한소 작용소는

$$\begin{aligned} A_Y\circ f(t,y,t_0,y_0) &= \frac{\partial f(t,y,t_0,y_0)}{\partial t}+\sum_{i=1}^m \mu_{Y_i}(t,y)\frac{\partial f(t,y,t_0,y_0)}{\partial y_i} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(t,y,t_0,y_0)}{\partial y_i \partial y_j} \end{aligned}$$

를 이용해야 한다. 그러면 다음과 같이 허마잇 급수 전개식을 얻는다 (Choi, 2013):

$$p_Y^{(J,K)}(t,y|t_0,y_0) =$$
$$\Delta^{-m/2}\phi\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\left\{\sum_{h\in N^m:|h|\le J}\frac{1}{h_1!\cdots h_m!}\left[\sum_{i=0}^K\frac{\Delta^i}{i!}A_Y^i\circ H_h\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\Big|_{y=y_0}\right]H_h\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\}.$$

5.1.2 Kolmogorov 편미분 방정식 방법

Kolmogorov 편미분 방정식 방법을 이용하기 위해서는 확산과정 Y_t의 전이확률밀도가 이에 대응하는 Kolmogorov 전진 그리고 후진 편미분방정식,

$$\frac{\partial p_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^m\frac{\partial\{\mu_{Y_i}(t,y)\,p_Y(t,y\mid t_0,y_0)\}}{\partial y_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\frac{\partial^2 p_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_i^2}$$

과

$$-\frac{\partial p_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial t_0} = \sum_{i=1}^m \mu_{Y_i}(t_0,y_0)\frac{\partial p_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_{0i}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\frac{\partial^2 p_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_{0i}^2}$$

를 만족한다는 사실을 이용해 시간-균질에서와 비슷하게 다른 형태의 근사적 전이확률밀도 함수를 다음과 같이 얻을 수 있다 (Choi, 2015).

Theorem 6. *시간-비균질 단위 확산과정 Y_t의 추세함수 벡터가 $[\mu_{Y_i}(t,y)]_{i=1,\cdots,m}$일 때 K차 근사적 전이확률밀도 함수는*

$$\begin{aligned}
& p_Y^{(K)}(t,y|t_0,y_0) \\
&= \Delta^{-m/2}\phi\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right)\exp\left[\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{0i})\int_0^1 \mu_{Y_i}(t,y_0+u(y-y_0))\,du\right] \\
&\times\sum_{k=0}^{K}c_Y^{(k)}(t,y|t_0,y_0)\frac{\Delta^k}{k!} \qquad (35)
\end{aligned}$$

이다. 여기에서 함수 $\phi(\cdot)$는 m차 표준 정규분포의 확률밀도 함수다. 그리고 $c_Y^{(0)}(t,y|t_0,y_0)=1$ 이며 모든 $k\geq 1$에 대해 $c_Y^{(k)}(t,y|t_0,y_0)$는 다음 식을 이용해 순차적으로 계산할 수 있다:

$$c_Y^{(k)}(t,y|t_0,y_0) = k\int_0^1 g^{(k)}(t,y_0+u(y-y_0)|t_0,y_0)\,u^{k-1}du$$

여기에서

$$\begin{aligned}
& g^{(k)}(t,\omega|t_0,y_0) \\
&= \left\{-\sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(t,\omega)\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\sum_{i=1}^{m}(\omega_i-y_{0i})\int_0^1\mu_{Y_i}(t,y_0+u(\omega-y_0))\,du\right)du\right. \\
&-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mu_{Y_i}(t,\omega)}{\partial\omega_i}-\sum_{i=1}^{m}(\omega_i-y_{0i})\int_0^1\frac{\partial\mu_{Y_i}(t,y_0+u(\omega-y_0))}{\partial t} \\
&+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\sum_{i=1}^{m}(\omega_i-y_{0i})\int_0^1\mu_{Y_i}(t,y_0+u(\omega-y_0))\,du\right)\right]^2 \\
&\left.+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega_i^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(\omega_i-y_{0i})\int_0^1\mu_{Y_i}(t,y_0+u(\omega-y_0))\,du\right)\right\}c_Y^{(k-1)}(t,\omega|t_0,y_0) \\
&+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\sum_{i=1}^{m}(\omega_i-y_{0i})\int_0^1\mu_{Y_i}(t,y_0+u(\omega-y_0))\,du\right)\frac{\partial c_Y^{(k-1)}(t,\omega|t_0,y_0)}{\partial\omega_i} \\
&-\sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(t,\omega)\frac{\partial c_Y^{(k-1)}(t,\omega|t_0,y_0)}{\partial\omega_i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c_Y^{(k-1)}(t,\omega|t_0,y_0)}{\partial\omega_i^2} \\
&-\frac{\partial c_Y^{(k-1)}(t,\omega|t_0,y_0)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

□

식 (35)에 로그를 취하고 Δ에 대한 테일러 급수를 구하면 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 구할 수 있다. 이 역시 시간-균질의 경우와 유사하게 Y_t의 로그-전이확률밀도 함수가 Kolmogorov 전진 편미분방정식

$$\begin{aligned}\frac{\partial l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mu_{Y_i}(t,y)}{\partial y_i}-\sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(t,y)\frac{\partial l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_i}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_i^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_i}\right]^2\end{aligned}$$

과 후진 편미분방정식

$$\begin{aligned}-\frac{\partial l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial t_0} &= \sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_i}(t_0,y_0)\frac{\partial l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_{0i}}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_{0i}^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial l_Y(t,y\mid t_0,y_0)}{\partial y_{0i}}\right]^2.\end{aligned}$$

을 만족한다는 사실을 이용해 다음을 증명할 수 있다.

Theorem 7. *다변수 시간-비균질 단위 확산과정 Y_t의 K차 로그-전이확률밀도 함수 전개식은*

$$l_Y^{(K)}(t,y\mid t_0,y_0)=-\frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta)+\frac{C_Y^{(-1)}(t,y\mid t_0,y_0)}{\Delta}+\sum_{k=0}^{K}C_Y^{(k)}(t,y\mid t_0,y_0)\frac{\Delta^k}{k!}$$

이고 여기에서

$$C_Y^{(-1)}(t,y\mid t_0,y_0)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{0i})^2,$$

이며

$$C_Y^{(0)}(t,y\mid t_0,y_0)=\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{0i})\int_0^1\mu_{Y_i}(t,y_0+u(y-y_0))\,du,$$

이고 나머지 모든 $k\geq 1$에 대해서는

$$C_Y^{(k)}(t,y\mid t_0,y_0)=k\int_0^1 G_Y^{(k)}(t,y_0+u(y-y_0)\mid t_0,y_0)\,u^{k-1}du$$

이다. 이 때

$$
\begin{aligned}
G_Y^{(1)}(t, y \mid t_0, y_0) &= -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mu_{Y_i}(t,y)}{\partial y_i} - \frac{\partial C_Y^{(0)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial t} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} \mu_{Y_i}(t,y) \frac{\partial C_Y^{(0)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\partial^2 C_Y^{(0)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i^2} + \left[\frac{\partial C_Y^{(0)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i} \right]^2 \right\}
\end{aligned}
$$

이고 모든 $k \geq 2$의 경우는

$$
\begin{aligned}
G_Y^{(k)}(t, y \mid t_0, y_0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 C_Y^{(k-1)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i^2} - \frac{\partial C_Y^{(k-1)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial t} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} \mu_{Y_i}(t,y) \frac{\partial C_Y^{(k-1)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k-1}{h} \frac{\partial C_Y^{(h)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i} \frac{\partial C_Y^{(k-1-h)}(t, y \mid t_0, y_0)}{\partial y_i}.
\end{aligned}
$$

변수 변환법을 이용해 *확산과정 X_t의 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 구하면*

$$
\begin{aligned}
l_X^{(K)}(t, x \mid t_0, x_0) &= -D_\upsilon(t,x) - \frac{m}{2} \ln(2\pi\Delta) + \frac{C_Y^{(-1)}(t, \gamma(t,x) \mid t_0, \gamma(t_0, x_0))}{\Delta} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{K} C_Y^{(k)}(t, \gamma(t,x) \mid t_0, \gamma(t_0, x_0)) \frac{\Delta^k}{k!}
\end{aligned}
$$

이다.

5.2. 축소 가능하지 않은 확산과정 (Irreducible Diffusion)

다변수 시간-비균질 확산과정이 축소가능하지 않으면 축소 가능 방법을 활용할 수 없다. 그래서 먼저 시간-균질에서와 같이 근사적 로그-전이확률밀도 함수를

$$l_X^{(K)}(t,x \mid t_0,x_0) = -\frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta) - D_\upsilon(t,x) + \frac{C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{K} C_X^{(k)}(t,x \mid t_0,x_0)\frac{\Delta^k}{k!} \tag{36}$$

로 놓는다. 이 식을 다변수 시간-비균질 확산과정 X_t의 로그-전이확률밀도 함수가 만족하는 Kolmogorov 전진 편미분 방정식

$$\begin{aligned}\frac{\partial l_X(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial t} = & -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mu_i(t,x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 \upsilon_{ij}(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} \\ & -\sum_{i=1}^{m}\mu_i(t,x)\frac{\partial l_X(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \\ & +\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \upsilon_{ij}(t,x)}{\partial x_i}\frac{\partial l_X(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} \\ & +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\upsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 l_X(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \\ & +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial l_X(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i}\upsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial l_X(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j}\end{aligned}$$

에 대입해 같은 차수의 Δ항들의 계수를 비교하면 다음의 결과를 얻는다.

Theorem 8. *다변수 시간-비균질 확산과정 X_t의 근사적 로그-전이확률밀도 함수의 계수, $C_X^{(k)}(t,x|t_0,x_0)$들은 다음의 편미분 방정식들을 만족한다:*

$$f_X^{(k-1)}(t,x \mid t_0,x_0) = 0$$

이 때 $k = -1, 0, \cdots, K$로

$f_X^{(-2)}(t,x \mid t_0,x_0)$

$= -2C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\upsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j}$ *이고,*

$f_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)$

$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\upsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} - G_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0),$

이며 모든 $k \geq 1$에 대해

$$\begin{aligned} f_X^{(k-1)}(t,x \mid t_0,x_0) &= C_X^{(k)}(t,x \mid t_0,x_0) \\ &\quad -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial C_X^{(k)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} \\ &\quad -G_X^{(k)}(t,x \mid t_0,x_0) \end{aligned}$$

이다. 여기에서 $k = 0$일 때는

$$G_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0) = -\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x|t_0,x_0)}{\partial t} + G_X^{(0,1)}(t,x \mid t_0,x_0) + G_X^{(0,3)}(t,x \mid t_0,x_0),$$

여기에서

$$\begin{aligned} G_X^{(0,1)}(t,x \mid t_0,x_0) &= -\sum_{i=1}^{m}\mu_i(t,x)\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \\ &\quad +\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \upsilon_{ij}(t,x)}{\partial x_i}\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} \\ &\quad -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\upsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial x_j} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\upsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 C_X^{(-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \text{ 이고,} \end{aligned}$$

$$G_X^{(0,3)}(t,x \mid t_0,x_0) = \frac{m}{2},$$

이다. 그리고 $k = 1$일 때는

$$\begin{aligned} &G_X^{(1)}(t,x \mid t_0,x_0) \\ &= -\frac{\partial C_X^{(0)}(t,x|t_0,x_0)}{\partial t} + G_X^{(1,1)}(t,x \mid t_0,x_0) + G_X^{(1,2)}(t,x \mid t_0,x_0) + G_X^{(1,3)}(t,x \mid t_0,x_0), \end{aligned}$$

여기에서

$$
\begin{aligned}
G_X^{(1,1)}(t,x \mid t_0,x_0) &= -\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t,x) \frac{\partial C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \upsilon_{ij}(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \frac{\partial C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial x_j} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}
$$

이고

$$
G_X^{(1,2)}(t,x \mid t_0,x_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \frac{\partial C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j}
$$

이며

$$
\begin{aligned}
& G_X^{(1,3)}(t,x \mid t_0,x_0) \\
&= \frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mu_i(t,x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \upsilon_{ij}(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(t,x) \frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial x_i} \\
&- \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \upsilon_{ij}(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial x_j} \\
&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \left[\frac{\partial^2 D_\upsilon(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial x_j} \right]
\end{aligned}
$$

이다. 또한 $k \geq 2$일 때는

$$
G_X^{(k)}(t,x \mid t_0,x_0) = -\frac{\partial C_X^{(k-1)}(t,x|t_0,x_0)}{\partial t} + G_X^{(k,1)}(t,x \mid t_0,x_0) + G_X^{(k,2)}(t,x \mid t_0,x_0)
$$

로 여기에서

$$
\begin{aligned}
G_X^{(k,1)}(t,x \mid t_0,x_0) \quad = \quad & -\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t,x) \frac{\partial C_X^{(k-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \\
& + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \upsilon_{ij}(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} \\
& - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \frac{\partial C_X^{(k-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial D_\upsilon(t,x)}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 C_X^{(k-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}
$$

이고

$$
\begin{aligned}
& G_X^{(k,2)}(t,x \mid t_0,x_0) \\
& = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \frac{\partial C_X^{(0)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij}(t,x) \left[\sum_{h=1}^{k-2} \binom{k-1}{h} \frac{\partial C_X^{(h)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1-h)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial x_j} \right]
\end{aligned}
$$

이다.□

시간-균질에서와 같이 위 편미분 방정식들도 일반적으로 구체적인 식으로 풀 수 없다. 그래서 Aït-Sahalia (2008)와 같이 각 편미분 방정식에서 계수들과 추세 함수 그리고 변동성 함수들을 t와 x 변수들에 대해 $t = t_0$ 그리고 $x = x_0$ 주변으로 테일러 급수 전개를 해 $C_X^{(k)}(t,x \mid t_0,x_0)$의 테일러 급수 $C_X^{(k,j_k)}(t,x \mid t_0,x_0)$를 구하는 방법을 고려할 수 있다. 그래서 식 (36)에서 $C_X^{(k)}(t,x \mid t_0,x_0)$를 $C_X^{(k,j_k)}(t,x \mid t_0,x_0)$로 바꾸면 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 얻을 수 있다:

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{l}_X^{(K)}(t,x \mid t_0,x_0) \\
& = -\frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta) - D_\upsilon(t,x) + \frac{C_X^{(j_{-1},-1)}(t,x \mid t_0,x_0)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{K} C_X^{(j_k,k)}(t,x \mid t_0,x_0) \frac{\Delta^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

앞에서 설명한대로 이러한 방식으로 각 계수의 테일러 급수를 찾을 때 $C_X^{(k,j_k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$는 $k = -1$부터 순서대로 그리고 각 테일러 급수 $C_X^{(k,j_k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$는 낮은 차수 부터 높은 차수까지 순차적으로 계산해야 한다. 그런데 시간-비균질의 경우에는 $C_X^{(-1,j_{-1})}(t,x\,|\,t_0,x_0)$에서 $(t-t_0)^{a_0}(x_h-x_{0h}), h = 1,\cdots,m$ 그리고 $a_0 \geq 1$, 의 모든 계수들과 $C_X^{(j_0,0)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$에서 $(t-t_0)^{a_0}$, $a_0 \geq 1$,의 모든 계수들을 구할 수 없는 문제가 생긴다. 따라서 무한히 많은 수의 계수들을 찾을 수 없는 것이다. $C_X^{(-1,j_{-1})}(t,x\,|\,t_0,x_0)$의 상수항과 1차 항들은 모두 0 이므로, $(t-t_0)(x_h-x_{0h})$의 계수 부터 구할 수 없다고 하면 처음부터 $C_X^{(-1,j_{-1})}(t,x\,|\,t_0,x_0)$를 구할 수 없기 때문에 Aït-Sahalia (2008)의 축소 가능하지 않은 방법을 시간-비균질 확산과정에 그대로 적용할 수는 없는 것이다[16]. 물론 시간-균질 확산과정에서는 이러한 문제가 생기지 않으며, 시간-비균질 모형이라고 하더라도 추세 함수만 시간에 의존하는 경우라면 이러한 문제가 없다.

Choi (2013)는 시간-비균질 확산과정에 이와 같은 문제가 있다는 것을 밝혀낸 후, 비록 테일러 급수들 $C_X^{(-1,j_{-1})}(t,x\,|\,t_0,x_0)$과 $C_X^{(j_0,0)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$의 수 많은 계수들을 구할 수 없고, 그러한 계수들은 보통 0이 아니고 위 편미분 방정식을 이용해 구할 수는 없지만, 근사식 (37)에서 모두 서로 상쇄되어 없어진다는 사실을 증명했다. 각 테일러 급수 $C_X^{(k,j_k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$의 높은 차수의 계수들은 낮은 차수들의 계수에 의존하고, k가 큰 $C_X^{(k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$들은 k가 작은 $C_X^{(k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$들에 의존하기 때문에 위에서 찾은, 테일러 급수에서 계산할 수 없는 계수들은 사실 모든 $C_X^{(k,j_k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$에 영향을 주게 된다. 그런데 이렇게 영향을 받는 모든 항들을 근사식 (37)에서 함께 모아보면 서로 상쇄되어 없어지는 것이다. 그렇기 때문에 결론은, 비록 테일러 급수에서 찾을 수 없는 계수들이 일반적으로 0 은 아니지만, $C_X^{(k,j_k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$를 순서대로 구하는 과정에서 이들을 0으로 놓고 근사적 로그-전이확률밀도 함수 (37)를 구해도 된다.

각 테일러 급수 $C_X^{(k,j_k)}(t,x\,|\,t_0,x_0)$의 차수를 정할 때 시간-균질에서와 같이 근사적 로그-전이확률밀도 함수의 오차 $O_p\left(\Delta^{K+1}\right)$과 같은 오차가 되도록 j_k를 선택해야 한다. 그런데 시간-비균질 모형의 테일러 급수에는 시간 항 Δ도

[16]Aït-Sahalia (2008)는 그의 논문에서 다변수 시간-비균질 확산 과정의 경우는 시간 변수를 추가적인 변수로 취급하면 시간-균질의 경우와 마찬가지로 근사적 전이확률밀도 함수를 구할 수 있다고 했다. 이 말은 축소 가능한 경우에는 맞다.

포함되어 있기 때문에 이를 고려해 다음과 같이 j_k를 정해야 한다:

$k=-1$	$(a_0,\lvert a\rvert)\in\{\,(0,2(K+2)),(1,2(K+1)),(2,2K),\cdots,$ $((K+1),2),((K+2),0)\}$
$k=0$	$(a_0,\lvert a\rvert)\in\{\,(0,2(K+1)),(1,2K),(2,2(K-1)),\cdots,$ $(K,2),((K+1),0)\}$
$k=1$	$(a_0,\lvert a\rvert)\in\{(0,2K),(1,2(K-1)),(2,2(K-2)),\cdots,$ $((K-1),2),(K,0)\}$
$\vdots$	$\vdots$
$k=K-1$	$(a_0,\lvert a\rvert)\in\{(0,4),(1,2),(2,0)\}$
$k=K$	$(a_0,\lvert a\rvert)\in\{(0,2),(1,0)\}$
$k=K+1$	$(a_0,\lvert a\rvert)\in\{(0,0)\}.$

(38)

여기에서 a_0는 $C_X^{(k,j_k)}(t,x\mid t_0,x_0)$에서 $\Delta=t-t_0$항의 차수를 $|a|$는 나머지 x변수들의 차수들의 합을 뜻한다. K차 까지만 로그-전이확률밀도 함수를 구하는데도 불구하고 마지막에 $C_X^{(0,K+1)}$항을 추가한 이유는, 이렇게 해야 미정 (indeterminant) 계수들이 식 (37) 속에서 모두 상쇄되어 없어지기 때문이다.

마지막으로 위에서 제안한 근사적 로그-전이확률밀도를 구하는 방법이 얼마나 정확하게 참 로그-전이확률밀도 함수를 근사시킬 수 있는지 알아보기 위해 Choi (2013)가 시행한 시뮬레이션 실험 결과들 중 하나를 보자. Choi (2013)는 참 로그-전이확률밀도 함수를 알고 있는 다음과 같은 2변수 시간-비균질 확산과정 모형인, Ornstein-Uhlenbeck 과정을 이용해 몬테칼로 시뮬레이션 실험을 했다:

$$dY_t=k(\alpha-\beta t-Y_t)\,dt+dW_t, \tag{39}$$

여기에서

$$k=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ 0 & k_{22}\end{pmatrix},\ \alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},\ \text{그리고}\ \beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$$

이다. 이와 같은 Ornstein-Uhlenbeck 과정의 참 전이확률밀도 함수는 평균이

$$m_t(t_0,y_0)=\exp(-k\Delta)\left(y_0-\alpha-\beta t_0+\int_0^{\Delta}\exp(ku)\,k\beta u\,du\right)+\alpha+\beta t_0$$

이고 분산이

$$V_t(t_0, y_0) = \int_0^{\Delta} \exp\left[-k(\Delta - u)\right] \left(\exp\left[-k(\Delta - u)\right]\right)^T du.$$

인 2변수 정규분포라는 사실은 잘 알려져있다.

모형 (39)의 분산행렬은 단위행렬이므로 축소 가능해 축소 가능법을 적용해 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 구할 수 있다. 그래서 축소 가능하지 않은 방법의 정확성도 알아보기 위해 확산과정 (Y_{1t}, Y_{2t})를 $(X_{1t}, X_{2t})^T = (\exp(Y_{1t}), \exp(Y_{2t}))^T$로 변환해 얻는 확산과정

$$\begin{aligned} dX_t &= \begin{pmatrix} X_{1t}\left[\frac{1}{2} + k_{11}(\alpha_1 + \beta_1 t - \ln(X_{1t})) + k_{12}(\alpha_2 + \beta_2 t - \ln(X_{2t}))\right] \\ X_{2t}\left[\frac{1}{2} + k_{21}(\alpha_1 + \beta_1 t - \ln(X_{1t})) + k_{22}(\alpha_2 + \beta_2 t - \ln(X_{2t}))\right] \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \begin{pmatrix} X_{1t} & 0 \\ 0 & X_{2t} \end{pmatrix} dW_t \end{aligned} \tag{40}$$

을 이용했다. 모형 (39)의 참 전이확률밀도 함수를 알고 있기에 여기에 로그를 취한 로그-전이확률밀도 함수를 $l_Y(t, y_1, y_t | t_0, y_{01}, y_{02})$라고 하면 변환한 모형 (40)의 참 로그-전이확률밀도 함수는 변수변환을 이용해

$$l_X(t, x | t_0, x_0) = -\ln(x_1 x_2) + l_Y\left[t, \ln(x_1), \ln(x_2) | t_0, \ln(x_{01}), \ln(x_{02})\right]$$

임을 알 수 있다.

이 실험에서는 모형 (40)의 모수들을 참 로그-전이확률밀도 함수와 축소 가능한 경우의 방법 그리고 축소 가능하지 않은 경우의 방법으로 구한 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 최우추정법으로 구한 모수들의 추정값들을 비교함으로써 근사적 로그-전이확률밀도 함수의 정확성을 평가한다. 이를 위해 Aït-Sahalia (2008)와 비슷하게 두 변수의 초기값을 $x_{01} = 0.0002$ 그리고 $x_{02} = 0.0004$로 하고 모수들의 참값을 $\theta_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, k_{11}, k_{12}, k_{22}) = (0, 0, 0.001, 0.005, 5, 1, 10)$로 놓은 후 참 전이확률밀도 함수를 이용해 500쌍의 주별 자료에 해당하는 표본을 생성했다. 이 표본에 참 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 구한 최우추정량을 $\hat{\theta}^{(True)}$, 축소 가능법에 따라 구한 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 구한 최우추정량을 $\hat{\theta}^{(2,\ Redu)}$, 그리고 축소 가능하지 않은 방법으로 구한 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 구한 최우추정량을 $\hat{\theta}^{(2,\ Irre)}$라고 하자. 여기에서 상첨자 2는$K = 2$차까지 구한 근사식을 이용해 구한 추정량을 뜻한다. 이와 같은 과정을 1,000번 반복해 얻은 추정값들을 비교한 것이 Choi (2013)의 57쪽 표 1에 정리돼있다.

표 1의 처음 두 열에는 각각 모형의 모수들과 이들의 참값이 있다. 둘 째 열과 셋 째 열에는 참 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 구한 최우추정값에서 참값을 뺀 것, $\hat{\theta}^{(True)} - \theta_0$의 평균과 표준편차가 있다. 그리고 다섯 째와 여섯 째 열에는 참 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 구한 최우추정값에서 축소 가능법을 이용해 구한 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 얻은 최우추정값을 뺀, $\hat{\theta}^{(True)} - \hat{\theta}^{(2,\, Redu)}$의 평균과 표준편차가 나타나 있다. 먼저 표본추출 (sampling) 과정에서 피할 수 없는 표집오차(sampling error), $\hat{\theta}^{(True)} - \theta_0$의 평균보다 $\hat{\theta}^{(True)} - \hat{\theta}^{(2,\, Redu)}$의 평균이 크게는 약 1/9 배에서 작게는 약 1/5000배까지 매우 작으며과 표준편차도 마찬가지로 상대적으로 후자가 전자보다 훨씬 작았다. 이러한 결과가 말하는 것은, 축소 가능법으로 구한 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 이용하더라도 참 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 모형을 추정하는 것 못지 않게 정확하게 모수를 추정할 수 있다는 것이다. 마지막 두 열에는 이전 두 열과 비슷하게 참 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 구한 최우추정값에서 축소가능하지 않는 방법으로 구한 근사적 로그-전이확률밀도 함수를 이용해 구한 최우추정량을 뺀 $\hat{\theta}^{(True)} - \hat{\theta}^{(2,\, Irre)}$의 평균과 표준편차가 정리되어 있다. 이 값들을 비교해 보면, 여전히 $\hat{\theta}^{(True)} - \theta_0$의 값들 보다는 매우 작은 편이지만 $\hat{\theta}^{(True)} - \hat{\theta}^{(2,\, Redu)}$ 보다는 약간 큰 편이다. 이는 축소 가능한 방법이 축소 가능하지 않은 방법보다는 더 정확하게 로그-전이확률밀도 함수를 근사시킬 수 있다는 것을 보여준다. 이는 예상할 수 있는 결과며 그 이유는 축소 가능하지 않는 방법은 x와 Δ에 대한 이중 급수 전개지만 축소 가능한 법은 Δ만에 대한 급수 전개 이기 때문이다. 물론 참 로그-전이확률밀도 함수를 알고 있다면 당연히 그것을 이용해 모형을 추정해야 한다. 그러나 그렇지 않다면 근사적 로그-전이확률밀도 함수가 참 로그-전이확률밀도 함수 대신에 사용될 수 있다는 것을 위의 몬테칼로 시뮬레이션 실험 결과가 말해주고 있다. 위 실험에서 모수들 $\beta_1 = 0$이고 $\beta_2 = 0$이면 시간 항이 없어지는데 그러면 Aït-Sahalia (2008)가 시행한 시뮬레이션 실험의 구성과 똑같아진다.

6. 결론

확산과정 모형의 전이확률밀도 함수나 로그-전이확률밀도 함수는 최우추정법으로 확산과정 모형을 추정할 때 뿐만 아니라 이 모형을 따르는 데이터를 만들거나 자산의 바탕이 되는 변수가 확산과정을 따르는 경우 자산의 가격을 계산할 때 유용하게 활용될 수 있다. 그렇지만 불행하게도 몇 가지 확산과정

모형들을 제외하고는 대부분의 확산과정 모형의 전이확률밀도 함수는 알려져 있지 않다.

이 문제를 해결하기위한 방안으로 Aït-Sahalia (2002)는 선도적으로 알려져 있지 않은 단일변수 시간-균질 확산과정의 전이확률밀도 함수를 구하는 방법과 이론을 개발했다. 그는 먼저 확산 과정을 변환해 얻은 확산 과정의 전이확률밀도 함수가 표준 정규분포의 확률밀도 함수에 가깝게 만든 후에 허마잇 다항식을 이용한 급수 전개식으로 구체적이고 정확하게 구했다. 그리고 전이확률밀도가 Kolmogorov 전진과 후진 편미분방정식을 만족한다는 사실을 이용해 다른 형태의 근사적 전이확률밀도 함수도 찾아냈다. 이 핵심적인 아이디어들은 이후에 Egorov, Li, and Xu(2003)이 단일변수 시간-비균질 확산과정으로, Aït-Sahalia (2008)가 다변수 시간-균질 확산과정으로, Choi (2013, 2015)가 다변수 시간-비균질 확산과정으로, Yu (2007)가 다변수 시간-균질 점프 확산과정으로, 그리고 Choi (2019a)가 다변수 시간-비균질 점프 확산과정으로 일반화했다. 이 논문들의 결과를 이용한 실증분석 논문들이 있고 다른 추정 방법에 응용한 연구 결과들도 있다. 또한 위 연구 결과들에 영향을 받아 관련된 또는 다른 방법으로 전이확률밀도 함수나 자산의 가격을 근사적으로 그리고 구체적인 식으로 구하는 것을 제안한 여러 연구자들도 있었다.

이 논문은 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방법에 대한 중심적인 연구들을 Aït-Sahalia (2002)의 단일변수 시간-균질 확산과정에서 Choi (2013, 2015)가 다변수 시간-비균질 확산과정까지 좀 더 자세히 설명하고 있다. 논문이 너무 길어지는 것을 막기 위해 점프 확산과정의 전이확률밀도 함수를 구하는 방법이나 관련된 다른 응용 연구들은 자세히 논의하지 않았다. 또한 연구 결과들을 자세히 설명하고 있기는 하지만, 이론적인 결과나 이를 위한 가정들에 대한 설명 보다는 구체적으로 새로운 방법론들을 어떻게 모형에 적용해 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 지 설명하는 것에 초점을 맞췄다.

중간에 각주로 언급했지만, 이 논문에서 소개하는 방법으로 근사적 (로그)-전이확률밀도 함수를 계산하기 위해서는 복잡한 미분이나 적분 계산을 많이 해야 한다. 이를 손으로 하기 보다는 Maple이나 Mathematica와 같은 프로그램을 이용할 것을 권한다. 그리고 Aït-Sahalia는 그의 홈페이지 (http://www.princeton.edu/~yacine/closedformmle.htm)에 그의 논문들, Aït-Sahalia (1999, 2002, 2008)와 Aït-Sahalia and Kimmel (2007, 2010)에서 채택한 모형들의 근사적 전이확률밀도 함수를 구한 Matlab 코드와 이를 이용할 수 있는 Toolbox와 설명서 등을 제공하고 있다. 또한 Lee *et al.* (2014)의 첫 번째 저자인 Lee는 Aït-Sahalia (2002)에서 이용된 모형을 추정할 수 있는 R 코드를 https://blog.naver.com/widylee/120128541187에 올려 놓았다. 본 논문의

독자들이 확산과정의 근사적 전이확률밀도 함수를 구하는 방법들에 대해 더 잘 이해하고 이를 활용해 실증 분석을 하거나, 선행 연구들에서 제안된 방법들을 개선할 수 있는 새로운 결과들을 내놓는데 조금이나마 도움이 될수 있기를 기대한다.

References

Ahn, D.H. and B. Gao (1999). "A Parametirc Nonlinear Model of Term Structure Dynamics," *Review of Financial Studies* 12(4), 721–762.

Aït-Sahalia, Y. (1996a). "Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities," *Econometrica* 64(3), 527–560.

Aït-Sahalia, Y. (1996b). "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate," *Review of Financial Studies* 9(2), 385–426.

Aït-Sahalia, Y. (1999). "TransitionDensitiesforInterestRateandOtherNonlinearDiffusions," *Journal of Finance* 54, 1361–1395.

Aït-Sahalia, Y. (2002). "Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach," *Econometrica* 70(1), 223–262.

Aït-Sahalia, Y. (2008). "Closed-Form Likelihood Expansions for Multivariate Diffusions," *Annals of Statistics* 36(2), 906–937.

Aït-Sahalia, Y. and R. Kimmel (2007). "Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models," *Journal of Financial Economics* 83, 413–452.

Aït-Sahalia, Y. and R. Kimmel (2010). "Estimating affine multifactor term structure models using closed-form likelihood expansions," *Journal of Financial Economics* 98, 113–144.

Aït-Sahalia, Y. and J. Yu (2006). "Saddlepoint approximations for continuous-time Markov processes," *Journal of Econometrics* 134, 507–551

Andersen, T. G. and T. Bollerslev (1997). "Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets," *Journal of Empirical Finance* 4, 115–158.

Andersen, T. G. and T. Bollerslev (1998). “Deutsche Mark-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies,” *Journal of Finance* 53(1), 219–265.

Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., and C. Vega (2003). “Micro Effects of Macro Announcements: Real-Time Price Discovery in Foreign Exchange,” *American Economic Review* 93(1), 38–62.

Arapis, M. and J. Gao (2006). “Empirical Comparisons in Short-term Interest Rate Models Using Nonparametric Methods,” *Journal of Financial Econometrics* 4, 310–345.

Bachelier, L. (1900). “Théorie de la speculation,” (in French), PhD Thesis.

Bakshi, G. and N. Ju (2005). “A Refinement to Aït-Sahalia’s (2000) Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-form Approximation Approach,” *Journal of Business* 78(5), 2037–2052.

Bakshi, G., Ju, N., and H. Ou-Yang (2006). “Estimation of Continuous-time Models with an Application to Equity Volatility,” *Journal of Financial Economics* 82, 227–249.

Bartolini, L., Bertola, G., and A. Prati (2002). “Day-to-Day Monetary Policy and the Volatility of the Federal Funds Interest Rate,” *Journal of Money, Credit and Banking* 34(1), 137–159.

Bibby, B. M. and M. Sørenson (1995). “Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes,” *Bernoulli* 1, 17–39.

Binh, K. (2009). “A Survey Study on the Estimation Techniques for Diffusion Processes,” *Journal of Economic Theory and Econometrics* 16(2), 63-121.

Black, F. and M. Scholes (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy* 81(3), 637–654.

Bollerslev, T., Cai, J., and F. M. Song (2000). “Intraday Periodicity, Long Memory Volatility, and Macroeconomic Announcement Effects in the US Treasury Bond Market,” *Journal of Empirical Finance* 7, 37–55.

Bolton, P. and C. Harris (1999). "Strategic Experimentation," *Econometrica* 67(2), 349–374.

Brennan, M. and E. Schwartz (1979). "A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds," *Journal of Banking and Finance* 3(2), 133–155.

Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., and A. B. Sanders (1992). "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Finance* 47(3), 1209–1227.

Chang, J. and S. X. Chen (2011). "On the Approximate Maximum Likelihood Estimation For Diffusion Processes," *Annals of Statistics* 39(6), 2820–2851.

Chen, R.-R. and L. Scott (1993). "Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Fixed Income* 3(3), 14–31.

Choi, S. (2009). "Regime-Switching Univariate Diffusion Models of the Short-Term Interest Rate," *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 13(1), Article 4.

Choi, S. (2013). "Closed-Form Likelihood Expansions for Multivariate Time-Inhomogeneous Diffusions," *Journal of Econometrics* 174(2), 45–65.

Choi, S. (2015). "Explicit Form of Approximate Transition Probability Density Functions of Diffusion Processes," *Journal of Econometrics* 187, 57–73.

Choi, S. (2019a). "Approximate Transition Probability Density Function of a Multivariate Time-Inhomogeneous Jump Diffusion Process in a Closed-Form Expression," Working paper, University of Seoul.

Choi, S. (2019b). "Estimation of Regime-Switching Continuous-Time Stochastic Volatility Models Using KOSPI 200," *Journal of Economic Theory and Econometrics* 30(1), 59-95.

Choi, S. and D. Yuan (2018). "Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Stochastic Volatility Models with Regime Shifts," Working paper, University of Seoul.

Constantinides, G. M. and J. E. Ingersoll (1984). “Optimal Bond Trading with Personal Taxes,’ *Journal of Financial Economics* 13(3), 299–335.

Courtadon, G. (1982). “The Pricing of Options on Default-Free Bonds,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17(1), 75–100.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and S. A. Ross (1980). “An Analysis of Variable Rate Loan Contracts,” *The Journal of Finance* 35, 389–403.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and S. A. Ross (1985). “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica* 53(2), 385–408.

Dai, Q. and K. J. Singleton (2000). “Specification Analysis of Affne Term-Structure Models,” *Journal of Finance* 55(5), 1943–78.

DiPietro, M. (2001). “Bayesian Inference for Discretely Sampled Diffusion Processes with Financial Applications,” Ph.D. thesis, Department of Statistics, Carnegie-Mellon University.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994). *Investment under nncertainty*, Princeton University Press.

Dothan, U. (1978). “On The Term Structure of Interest Rates,” *Journal of Financial Economics* 6, 59–69.

Duffie, D. (2001). *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, 3rd ed.

Duffie, D. and P. Glynn (2004). “Estimation of Continuous-Time Markov Processes Sampled at Random Time Intervals,” *Econometrica* 72(6), 1773–1808.

Duffie, D. and R. Kan (1996). “A Yield-Factor Model of Interest Rates,” *Mathematical Finance* 6(4), 379–406.

Duffie, D. and K. Singleton (1993). “Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices,” *Econometrica* 61, 929–952.

Durham, G. (2003). “Likelihood-based Specification Analysis of Continuous-time Models of the Short-term Interest Rate,” *Journal of Financial Economics* 70, 463–487.

Durham, G. B. and A. R. Gallant (2002). “Numerical Techniques for Simulated Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Diffusion,” *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 297–338.

Egorov, A. V., Li, H., and D. Ng (2011). “A Tale of Two Yield Curves: Modeling the Joint Term Structure of Dollar and Euro Interest Rates,” *Journal of Econometrics* 162, 55–70.

Egorov, A. V., Li, H., and Y. Xu (2003). “Maximum Likelihood Estimation of Time Inhomogeneous Diffusions,” *Journal of Econometrics* 114, 107–139.

Elerian, O., Chib, S., and N. Shephard (2001). “Likelihood Inference for Discretely Observed Non-linear Diffusions,” *Econometrica* 69(4), 959–993.

Eraker, B. (2001). “MCMC Analysis of Diffusion Models with Application to Finance,” *Journal of Business and Economic Statistics* 19, 177–191.

Filipović, D., Mayerhofer, E., and P. Schneider (2013). “Density Approximations for Multivariate Affine Jump-Diffusion Processes,” *Journal of Econometrics* 176, 93–111.

Franses, P. H. (1996). “Recent Advances in Modelling Seasonality,” *Journal of Economic Surveys* 10(3), 299–345.

Gallant, A. R. and G. Tauchen (1996). “Which Moments to Match?,” *Econometric Theory* 12, 657–681.

Gallant, A. R. and G. Tauchen (1998). “Reprojecting Partially Observed Systems with Application to Interest Rate Diffusions,” *Journal of the American Statistical Association* 93(441), 10–24.

Gibbons, M. and K. Ramaswamy (1993). “A Test of the Cox, Ingersoll, and Ross Model of the Term Structure,” *The Review of Financial Studies* 6(3), 619–658.

Gouriéroux, C. S., Monfort, A., and E. Renault (1993). “Indirect Inference,” *Journal of Applied Econometrics* 8, S85–S118.

Hansen, L. P. and J. A. Scheinkman (1995). “Back to the Future: Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes,” *Econometrica* 63(4), 767–804.

Hansen, P. R. and A. Lunde (2005). "Testing the Significance of Calendar Effects, Federal Reserve Bank of Atlanta," Working Paper 2005-2.

Heston, S. L. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies* 6(2), 327–343.

Holmstrom, B. and P. Milgrom (1987). "Aggregation and Linearity in the Provision of Intertemporal Incentives," *Econometrica* 55(2), 303–328.

Jensen, B. and R. Poulsen (2002). "Transition Densities of Diffusion Processes: Numerical Comparison of Approximation Techniques," *Journal of Derivatives* 9, 18–32.

Jones, C. S. (2003a). "The Dynamics of Stochastic Volatility: Evidence from Underlying and Options Markets," *Journal of Econometrics* 116, 181–224.

Jones, C. S. (2003b). "Nonlinear Mean Reversion in the Short-term Interest Rate," *Review of Financial Studies* 16(3), 793–843.

Jordan, S. D. and B. D. Jordan (1991). "Seasonality in Daily Bond Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 26(2), 269–285.

Kessler, M. and M. Sørenson (1999). "Estimating Equations Based on Eingenfunctions for a Discretely Observed Diffusion," *Bernoulli* 5, 299–314.

Kristensen, D. (2010). "Pseudo-maximum Likelihood Estimation in Two Classes of Semiparametric Diffusion Models," *Journal of Econometrics* 156, 239–259.

Kristensen, D. and A. Mele (2011). "Adding and Subtracting Black-Scholes: A New Approach to Approximating Derivative Prices in Continuous-Time Models," *Journal of Financial Economics* 102, 390–415.

Krugman, P. R. (1991). "Target Zones and Exchange Rate Dynamics," *The Quarterly Journal of Economics* 106(3), 669–682.

Langetieg, T. C. (1980). "A Multivariate Model of the Term Structure," *Journal of Finance* 35(1), 71–97.

Lee, Y. D., Song, S., and E. K. Lee (2014). "The Delta Expansion for the Transition Density of Diffusion Models," *Journal of Econometrics* 178, 694–705.

Lewis, A. (2000). *Option Valuation under Stochastic Volatility,* Finance Press, Newport Beach.

Li, C. (2013). "Maximum-Likelihood Estimation For Diffusion Processes via Closed-Form Density Expansions," *Annals of Statistics* 41(3), 1350–1380.

Li, C. (2014). "Closed-form Expansion, Conditional Expectation, and Option Valuation," *Mathematics of Operations Research* 39(2), 487–516.

Li, C. and D. Chen (2016). "Estimating Jump-Diffusions Using Closed-Form Likelihood Expansions," *Journal of Econometrics* 195(1), 51–70.

Li, M. (2010). "A Damped Diffusion Framework for Financial Modeling and Closed-form Maximum Likelihood Estimation, *Journal of Economic Dynamics and Control* 34, 132–157.

Lockwood, L. J. and S. C. Linn (1990). "An Examination of Stock Market Return Volatility During Overnight and Intraday Periods, 1964-1989," *Journal of Finance* 45(2), 591–601.

Lucia, J. J. and E. S. Schwartz (2002). "Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange," *Review of Derivatives Research* 5, 5–50.

Meddahi, N. (2001). "An Eigenfunction Approach for Volatility Modeling," Working paper, Université de Montréal.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141–183.

Misiorek, A., Trueck, S., and R. Weron (2006). "Point and Interval Forecasting of Spot Electricity Prices: Linear vs. Non-linear Time Series Models," *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 10(3), Article 2.

Nelson, D. (1990). "ARCH Models as Diffusion Approximations," *Journal of Econometrics* 45, 7–38.

Pearson, N. D. and T. S. Sun (1994). "Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Finance* 49(4), 1279–1304.

Pedersen, A. R. (1995). "A New Approach to Maximum-Likelihood Estimation for Stochastic Differential Equations Based on Discrete Observations," *Scandinavian Journal of Statistics* 22, 55–71.

Phillips, P. C. (2001). "Trending Time Series and Macroeconomic Activity: Some Present and Future Challanges," *Journal of Econometrics* 100, 21–27.

Piazzesi, M. (2005). "Bond Yields and the Federal Reserve," *Journal of Political Economy* 113(2), 311–344.

Santa-Clara, P. (1995). "Simulated Likelihood Estimation of Diffusions with an Application to the Short Term Interest Rate," Ph.D. thesis, INSEAD.

Stambaugh, R. (1988). "The Information in Forward Rates," *Journal of Financial Economics* 21(1), 41–70.

Stanton, R. (1997). "A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk," *Journal of Finance* 52(5), 1973–2002.

Stramer, O., Bognar, M., and P. Schneider (2010). "Bayesian Inference for Discretely Sampled Markov Processes with Closed-Form Likelihood Expansions," *Journal of Financial Econometrics* 8(4), 450–480.

Tauchen, G. E. (1997). "New Minimum Chi-square Methods in Empirical Finance," in *Advances in Econometrics,* Vol. 3, eds., K. Wallace and D. Kreps, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 279–317.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5(2), 177–188.

Wan, X. and N. Yang (2019). "Hermite Expansion for Transition Densities of Irreducible Diffusions with An Application to Option Pricing," Working paper.

Xiu, D. (2014). "Hermite Polynomial Based Expansion of European Option Prices," *Journal of Econometrics* 179, 158–177.

Yang, N., Chen, N., and X. Wan (2019). "A New Delta Expansion for Multivariate Diffusions via the Ito-Taylor Expansion," *Journal of Econometrics* 209, 256–288.

Yu, J. (2007). "Closed-Form Likelihood Approximation and Estimation of Jump-Diffusions with an Applicaiton to the Realignment Risk of the Chinese Yuan," *Journal of Econometrics* 141, 1245–1280.